ISPITI IZ MATEMATIKE IV

održani na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu.

1. rok 25. jun 1994.

1. Neka je $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ i neka je u skupu S definisana relacija $\leq$ tako da je $(\forall a \in S)\ a_1 \leq a \leq a_5$, dok ostali parovi elemenata nisu uporedivi.

1° Dokazati da je $(S, \leq)$ mreža.

2° Dokazati da ta mreža nije distributivna.

2. Transformisati u SKOLEMov standardni oblik sledeće kvantifikatorske formule:

1° $(\forall x)(\forall y)\Big((\exists z)\big(P(x,z) \wedge P(y,z)\big) \;\Rightarrow\; (\exists u)Q(x,y,u)\Big)$;

2° $(\forall x)(\forall y)\Big((\exists z)P(x,y,z) \wedge \big((\exists u)Q(x,u) \;\Rightarrow\; (\exists v)Q(y,v)\big)\Big)$.

3. Definicija i primer rekurzivne funkcije.

4. 1° Odrediti A, B, C, a tako da formula za numeričku integraciju

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = A\Big(f(-1) + f(1)\Big) + B\Big(f(-a) + f(a)\Big) + Cf(0) + R(f) \tag{1}$$

ima najveći algebarski stepen tačnosti.

2° Pomoću (1) izračunati

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\exp\left(x\left(x^2 - \frac{3}{7}\right)\right)\mathrm{d}x.$$

5. Funkcija f data je tabelom:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	0	0	1	1

Aproksimirati ovu funkciju I i II NEWTONovim interpolacionim polinomom i na osnovu toga izračunati približnu vrednost $f''(0)$.

6. Modifikacije NEWTON-RAPHSONovog metoda.

7. Izraziti sferne Besselove funkcije $J_{1/2}(x)$ i $J_{-1/2}(x)$ u konačnom obliku pomoću elementarnih funkcija.

8. Polazeći od funkcije generatrise LEGENDREovih polinoma, izvesti BONNETovu i CHRISTOFFELovu rekurentnu relaciju.

2. rok 7. septembar 1994.

1. Odrediti kompleksnost algoritma za izračunavanje vrednosti determinante reda n

a) ako se determinanta izračunava po definiciji,

b) ako se determinanta transformiše na trougaoni oblik.

2. Odrediti sve ireducibilne polinome drugog stepena nad poljem $GF(3)$.

3. Definisati sledeće pojmove iz matematičke logike: atom, literal, sastavak, supstitucija, unifikator, rezolventa.

4. Primenom prvog NEWTONovog interpolacionog polinoma izračunati sume

$$S_n = \sum_{k=1}^{3n} k^2, \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{3n} (-1)^{k-1} k^2.$$

5. Data je diferencijalna jednačina $y' = x^2 + y,\ y(0) = 1$. Razviti algoritam za što preciznije izračunavanje one vrednosti x za koju je $y = 10$.

6. AITKEN-ov δ^2-metod.

7. Razviti u FOURIERov red funkcije $x \mapsto \cos(\sin x), \quad x \mapsto \sin(\cos x)$.

8. HERMITEovi polinomi. Definicija i rekurentne relacije.

3. rok 28. septembar 1994.

1. Dokazati da su sledeće aritmetičke funkcije primitivno rekurzivne:

$$1^\circ\ \ f_1(x,y) = x + y, \quad 2^\circ\ \ f_2(x,y) = x \cdot y, \quad 3^\circ\ \ f_3(x,y) = x^y.$$

2. Primenom principa rezolucije dokazati da iz premise

$$(\forall x)\Big((\exists y)\big(S(x,y) \land M(y)\big) \Rightarrow (\exists y)\,\big(I(y) \land E(x,y)\big)\Big)$$

sleduje zaključak

$$\neg(\exists x)\, I(x) \Rightarrow (\forall x)\,(\forall y)\,\big(S(x,y) \Rightarrow \neg M(y)\big).$$

3. Definicija S-mreže. Navesti primer S-mreže uz odgovarajući dokaz.

4. Funkciju $x \mapsto \operatorname{sgn} x$ aproksimirati interpolacionim polinomom, pri čemu se uzima 5 čvorova sa apscisama $-2, -1, 0, 1, 2$. Kolika je maksimalna greška aproksimacije za $x \in (1,2)$?

5. Formirati algoritam za nalaženje onog partikularnog rešenja diferencijalne jednačine $y'' + y' = xy$, na segmentu $[0, 1]$, koje zadovoljava početne uslove $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

6. Metod gradijenta za rešavanje sistema nelinearnih jednačina.

7. Kako se dobija BESSELova diferencijalna jednačina iz rekurentnih formula ?

8. Polazeći od funkcije generatrise ČEBIŠEVljevih polinoma, izvesti izraz za ČEBIŠEVljev polinom.

4. rok 2. februar 1995.

1. Odrediti kompleksnost algoritma za utvrđivanje da li u datom grafu sa $2n$ čvorova postoji potpun podgraf

a) sa k čvorova ($k \geq 3$),

b) sa n čvorova,

c) sa najviše n čvorova.

2. Dat je skup svih uređenih petorki sastavljenih od simbola 0 i 1 koje sadrže paran broj simbola 1. Ispitati kakav kod obrazuje ovaj skup.

3. TURINGova mašina za probleme odlučivanja.

Program za TURINGovu mašinu i algoritamska rešivost problema.

4. Predložiti metod za precizno izračunavanje integrala

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x(1-x)}}\, \mathrm{d}x,$$

pri čemu treba pogodnim smenama eliminisati singularitete $x = 0$ i $x = 1$.

5. Funkcija f data je tabelom:

x	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	2.0	1.9	2.1	3.5

.

Odrediti ono x za koje $f(x)$ dostiže minimum i izračunati približnu vrednost $f_{\min}$.

6. Izvesti trotačkastu GAUSS-LEGENDREovu formulu.

7. BESSELovu funkciju $J_n(x)$ prikazati u integralnom obliku i u obliku potencijalnog reda.

8. Dokazati RODRIGUESovu formulu za LEGENDREove polinome.

5. rok 8. april 1995.

1. Pomoću principa rezolucije dokazati da je formula

$$(\exists x)\ \big(C(x) \wedge D(x)\big)$$

posledica formula

$$(\forall x)\ \Big(A(x)\ \Rightarrow\ \big(B(x) \wedge C(x)\big)\Big), \qquad (\exists x)\ \big(A(x) \wedge D(x)\big).$$

2. Dat je polinom $p = x^2 + x + \alpha$ nad poljem $GF(4)$.
Ispitati za koje je $\alpha \in GF(4)$ ovaj polinom ireducibilan.

3. Dokazati da je karakteristika konačnog polja prost broj.

4. Predložiti metod za precizno izračunavanje $\int\limits_0^1 \frac{\cos x^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

5. Data je diferencijalna jednačina $y'' + x^2 y = 0$ i početni uslovi $y(0) = 0$ i $y'(0) = 1$. Razviti algoritam za izračunavanje $y(0.35)$ i $y(0.47)$ sa greškom manjom u svakom koraku od 10^{-8}.

6. Izvesti NEWTONove interpolacione polinome.

7. Dobijanje BESSELove diferencijalne jednačine. Kako se ponašaju BESSELove funkcije u beskonačnosti?

8. Polazeći od odgovarajuće funkcije generatrise izvesti formulu za LAGUERREov polinom $L_n(x)$ u kojoj se pojavljuje n-ti izvod jedne funkcije.

6. rok 24. jun 1995.

1. Ispitati da li su rekurzivne sledeće aritmetičke funkcije:

$$f_1(x, y) = x + y\,; \quad f_2(x, y) = xy\,; \quad f_3(x, y) = x^y\,.$$

2. Proveriti da li je polinom $x^4 + x^2 + 1$ reducibilan nad poljem GF(4) i odrediti nule ovog polinoma u istom polju.

3. Definisati pojam $S-$mreže i pojam $A-$mreže. Navesti, uz obrazloženje, po jedan primer ovih struktura. Koja veza postoji između $S-$mreža i $A-$mreža?

4. Data je diferencijalna jednačina $y'' = -4y^3$, sa početnim uslovima $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

1° Za neku vrednost $x = a$ y dostiže maksimalnu vrednost. Razviti postupak za precizno izračunavanje a.

2° Za $x > a$, y opada i postaje nula za neko $x = b$. Kako se može što tačnije odrediti b ?

5. Predložiti metod za numeričko izračunavanje integrala $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x.$

6. AITKENov δ^2−proces (aktivni i pasivni).

7. Sferne Besselove funkcije. Izraziti $J_{1/2}(x)$ i $J_{-1/2}(x)$ u konačnom obliku pomoću elementarnih funkcija.

8. HERMITEovi polinomi. Definicija, rekurentne relacije i diferencijalna jednačina.

7. rok 13. septembar 1995.

1. Koristeći se principom rezolucije dokazati da je formula Q posledica formula $P \Rightarrow Q$, $P \vee R$, $R \Rightarrow \urcorner S$ i S.

2. Ispitati da li je polinom $x^2 + 1$ ireducibilan nad poljem $GF(3)$. Konstruisati CAYLEYevu tablicu multiplikativne grupe polja $GF(9)$.

3. TURINGova mašina za probleme odlučivanja.

4. Primenom RUNGE–KUTTA metoda četvrtog reda formirati algoritam za nalaženje onog partikularnog rešenja diferencijalne jednačine $y'' = y' - xy + 2$, na segmentu $[0,1]$, koje zadovoljava početne uslove $y(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

5. Predložiti metod za nalaženje najmanjeg pozitivnog korena jednačine

$$100 \sin x = x.$$

6. ROMBERGov metod numeričke integracije.

7. Definicija BESSELovih funkcija prve vrste celobrojnog indeksa. Izvesti oblike u kojima se mogu izraziti ove funkcije.

8. LAGUERREovi polinomi. Funkcija generatrisa i izvođenje rekurentnih relacija.

8. rok 4. oktobar 1995.

1. U multiplikativnoj grupi polja GF(7) odrediti:

a) red svakog elementa; b) generatore grupe; c) cikličke podgrupe; d) elemente koji su sami sebi inverzni.

2. Pomoću tablice istinitosti proverava se da li je formula iskazne algebre tautologija. Koliko elementarnih koraka je potrebno učiniti u najnepovoljnijem slučaju ako formula sadrži n iskaznih slova i m operacijskih simbola?

3. Definicija rekurzivne funkcije i CHURCHova teza.

4. Polinom trećeg stepena $P_3(x)$ tabeliran je na sledeći način:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P_3(x)$	-73	-27	-7	-3	3	17	53	123	239

Ako se zna da je jedna vrednost polinoma pogrešno izračunata, pronaći ovaj podatak, ispraviti ga i odrediti polinom $P_3(x)$.

5. Predložiti metod za nalaženje najmanje vrednosti a tako da je $e^{-ax} \le 1/(1+x^2)$ za svako $x > 0$.

6. RUNGE–KUTTA metod drugog reda.

7. Dokazati da je $J_4(\sqrt{6}\,) + 3J_0(\sqrt{6}\,) = 0$, gde J BESSELova funkcija prve vrste.

8. Polazeći od eksplicitnog izraza za ČEBIŠEVljev polinom, izvesti ČEBIŠEVljevu diferencijalnu jednačinu. Koje je opšte rešenje ove jednačine?

9. rok — 9. februar 1996.

1. Proceniti algoritamsku kompleksnost 3–optimalne heuristike za problem trgovačkog putnika.

2. Proveriti da li u polju $\mathrm{GF}(p^k)$ važi relacija

$$(x+y)^p = x^p + y^p.$$

Direktnim izračunavanjem proveriti relaciju u polju $\mathrm{GF}(7)$ za $x = 1$ i $y = 2$.

3. Formulisati HERBRANDovu teoremu i definisati pojmove koji se pojavljuju u formulaciji teoreme. Definisati takođe HERBRANDov domen. Navesti primer primene HERBRANDove teoreme.

4. Date su krive $y = 2\sin x$ i $y = \log x - a$. Razviti postupak za izračunavanje konstante a tako da se krive dodiruju u tački čija je apscisa bliska $5\pi/2$.

5. Odrediti A, B, a tako da formula

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = A\big(f(-1)+f(1)\big) + B\big(f(-a)+f(a)\big) + R(f)$$

ima najveći algebarski stepen tačnosti.

Primenom dobijene formule izračunati približnu vrednost integrala

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$$

6. Principi višekoračnih formula za rešavanje diferencijalnih jednačina.

7. BESSELovu funkcije $J_{5/2}(x)$ i $J_{3/2}(x)$ izraziti pomoću elementarnih funkcija.

8. Izvesti rekurentne relacije za LEGENDREove polinome.

10. rok 6. april 1996.

1. Proceniti kompleksnost algoritma potpune pretrage za rešavanje problema egzistencije potpunog podgrafa sa k čvorova u zadatom grafu. Da li je ovaj algoritam polinomijalan ili eksponencijalan?

2. a) Izvršiti skolemizaciju formule

$$(\exists x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(\exists v)\, P(x,y,z,u,v,w).$$

b) Da li postoji unifikator skupa literala

$$\{Q(x,y,z),\ Q(f(y),a,x)\}\,?$$

c) Odrediti kompoziciju supstitucija

$$\theta = \{f(y)/x, z/y\} \ \text{ i } \ \delta = \{a/x, b/y, y/z\}.$$

3. Definicija linearnog koda. Čemu je jednako kodovsko rastojanje ovakvog koda? Koju relaciju zadovoljavaju generatorske matrice uzajamno dualnih linearnih kodova?

4. Jednačina $e^z = (5+3i)z$ ima koren u blizini tačke $3+i$. Razviti metod za izračunavanje tog korena sa velikom tačnošću.

5. Data je diferencijalna jednačina $y'' = x^2 y$ sa početnim uslovima $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

1° Primenom RUNGE–KUTTA metoda četvrtog reda razviti algoritam za numeričko rešavanje ove jednačine na segmentu $[0,1]$.

2° Naći prva dva člana razvoja rešenja u TAYLORov red u tački $x = 0$.

6. Izvesti prvi i drugi NEWTONov interpolacioni polinom.

7. Ako su $J_m(x)$ i $J_n(x)$ BESSELove funkcije prve vrste, gde $m, n \in \{0,1,2,\ldots\}$, dokazati da za svako x važi nejednakost

$$|J_m(x) + J_n(x)| \le a$$

i odrediti a.

8. Polazeći od funkcije generatrise LEGENDREovih polinoma, izvesti eksplicitan izraz za LEGENDREov polinom.

11. rok 23. jun 1996.

1. Predstaviti kvantifikatorsku formulu $(\forall x)\,(\exists y)\,\big(P(x) \;\Rightarrow\; Q(y)\big) \;\Leftrightarrow\; (\exists x)R(x)$ pomoću skupa sastavaka.

2. Neka je D skup delilaca broja 24.

1° Ispitati da li je $(D, |\,)$ parcijalno uređen skup i ako jeste, predstaviti ga HASSEovim dijagramom.

2° Ispitati da li je $(D, |\,)$ S-mreža i ako jeste, konstruisati odgovarajuću A-mrežu.

3. Opisati rad nedeterminističkog polinomijalnog algoritma za rešavanje problema odlučivanja. Determinisati klasu problema NP i objasniti karakterizaciju ove klase pomoću svedočanstva ispravnosti potvrdnog odgovora.

4. Polinom trećeg stepena $P_3(x)$ tabeliran je na sledeći način:

x	$P_3(x)$	x	$P_3(x)$	x	$P_3(x)$	x	$P_3(x)$
-4	-81	-1	-5	2	4	5	103
-3	-41	0	-3	3	19	6	184
-2	-16	1	-1	4	50	7	299

1° Ako se zna da su dva podatka pogrešna, utvrditi koji su to podaci i ispraviti ih.

2° Odrediti polinom $P_3(x)$.

5. 1° Formirati algoritam za nalaženje onog partikularnog rešenja diferencijalne jednačine $y'' + y' = x^2 y$ na segmentu $[0, 1]$ koje zadovoljava početne uslove $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2° Kako bi se našlo opšte rešenje na ovom segmentu?

6. AITKENov δ^2-proces (aktivni i pasivni).

7. Funkcije $f(\theta) = \sin(1 + \sin 2\theta)$ i $g(\theta) = \cos(1 + \cos 2\theta)$ razviti u FOURIERov red.

8. Funkcija generatrisa i eksplicitni izraz za ČEBIŠEVljeve polinome $T_n(x)$. Odrediti $T_0(x)$, $T_1(x)$ i $T_2(x)$.

12. rok 14. septembar 1996.

1. Konstrukcijom pogodnog svedočanstva istinitosti potvrdnog odgovora, dokazati da sledeći problemi pripadaju klasi NP :

a) Problem egzistencije potpunog podgrafa;

b) Problem trgovačkog putnika;

c) Problem utvrđivanja singularnosti kvadratne matrice.

2. a) Dokazati da je $x^{n-1}=1$ ako je $x \in GF(n)$ i $x \neq 0$.

b) Dokazati da je polinom $x^n - x$ nad poljem $GN(n)$ identički jednak nuli.

c) Konstruisati dva međusobno različita polinoma nad poljem $GF(n)$ koji imaju iste vrednosti za svaku vrednost nezavisno promenljive.

3. Definicija i primer formalne teorije.

4. Predložiti metod za precizno izračunavanje $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$.

5. 1° Diskutovati ponašanje niza formiranog pomoću iterativne formule

$$x_0 = 1, \quad x_{k+1} = \frac{1}{5}\left(3x_k + \frac{4}{{x_k}^2}\right).$$

2° Odrediti niz koji brže konvergira ka nepokretnoj tački, od niza dobijenog gornjom iterativnom formulom.

6. Runge–Kutta metod drugog reda.

7. Funkciju $x \mapsto f(x)$ datu pomoću integrala $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos tx}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ razviti u potencijalni red u okolini tačke $x=0$.

8. Polazeći od funkcije generatrise za Laguerreove polinome $L_n(x)$, izvesti formulu

$$L_n(x) = e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x}).$$

13. rok — 5. oktobar 1996.

1. Neka je $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ i neka je u skupu S definisana relacija $\leq$ tako da je $(\forall a \in S)\ a_1 \leq a \leq a_5$, dok ostali parovi elemenata nisu uporedivi.

1° Dokazati da je $(S, \leq)$ mreža.

2° Dokazati da ta mreža nije distributivna.

2. Odrediti sve ireducibilne polinome drugog stepena nad poljem $GF(3)$.

3. Definicija i primer rekurzivne funkcije.

4. Funkcija f data je tabelom:

x	–1	0	1	2	3
$f(x)$	1	0	0	1	1

Aproksimirati ovu funkciju I i II Newtonovim interpolacionim polinomom i na osnovu toga izračunati približne vrednosti $f'(0)$ i $f''(0)$.

5. Data je diferencijalna jednačina

$$y' = x^2 + y, \qquad y(0) = 1.$$

Razviti algoritam za što preciznije izračunavanje one vrednosti x za koju je $x^2 + y^2 = 100$.

6. Modifikacije NEWTON–RAPHSONovog metoda.

7. Izraziti sferne Besselove funkcije $J_{3/2}(x)$ i $J_{-3/2}(x)$ u konačnom obliku pomoću elementarnih funkcija.

8. HERMITEovi polinomi. Definicija i rekurentne relacije.

14. rok — 3. maj 1997.

1. Neka je $\{0, 1, b\}$, gde je b prazan simbol, azbuka a $\{q_0, q_1, q_2, q_+, q_-\}$ skup stanja TURINGove mašine. Konstruisati program za ovu TURINGovu mašinu koja ispituje da li je broj jedinica u ulaznom nizu paran.

2. Konstruisati polje $GF(4)$ sa elementima $\{0, 1, \alpha, \beta\}$. Ispitati da li su polinomi $x^2 + x + \alpha$, $x^2 + x + \beta$ ireducibilni nad poljem $GF(4)$.

3. Skolemizacija formule. Objašnjenje i primeri.

4. Funkciju $x \mapsto |x|$ aproksimirati interpolacionim polinomom, pri čemu se uzima 5 čvorova sa apscisama $-2, -1, 0, 1, 2$.

Integracijom interpolacionog polinoma izračunati približnu vrednost integrala $\int\limits_{-2}^{2} |x| \, \mathrm{d}x$ i odrediti grešku.

5. Formirati algoritam za nalaženje onog partikularnog rešenja diferencijalne jednačine $y'' + xy' = y$, na segmentu $[0, 1]$, koje zadovoljava uslove $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Zatim odrediti prva tri člana razvoja rešenja u TAYLORov red u okolini tačke $x = 0$.

6. AITKENov aktivni i pasivni δ^2-metod za ubrzavanje konvergencije linearnih iterativnih procesa.

7. Funkcije $f(x) = \cos(1 + \cos 2x)$, $\quad g(x) = \sin(1 + \cos 2x)$ razviti u FUORIERov red.

8. Izvesti RODRIGUESovu formulu za LEGENDREove polinome.

15. rok 6. jul 1997.

1. Koristeći se principom rezolucije dokazati da je sledeća formula valjana:

$$(\exists x)(\forall y)P(x,y) \;\Rightarrow\; (\forall y)(\exists x)P(x,y).$$

2. Odrediti sve ireducibilne polinome trećeg stepena nad GF(2).

3. Rešavanje problema odlučivanja pomoću TURINGove mašine. Kada se kaže da je problem algoritamski rešiv ?

4. Razviti operator D po stepenima operatora ∇ i primenom izvedene formule izračunati $f''(0)$ na osnovu sledećih podataka

x	-3	-2	-1	0
$f(x)$	-18	-4	0	0

Proveriti dobijeni rezultat formiranjem drugog NEWTONovog interpolacionog polinoma.

5. Izvesti GAUSSovu kvadraturnu formulu oblika

$$\int_{-1}^{1} (1+|x|)f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f).$$

Pomoću dobijene formule naći približnu vrednost $\int_{-1}^{1} (1+|x|)e^{x^2-7/18}\,\mathrm{d}x$.

6. Izvesti RUNGE–KUTTA metod drugog reda.

7. Primenom rekurentnih formula za BESSELove funkcije prve vrste uprostiti izraz $J_3(x) + 3J_0'(x) + 4J_0'''(x)$.

8. HERMITEovi polinomi: Rekurentne relacije i diferencijalna jednačina.

16. rok 13. avgust 1997.

1. Konstrukcijom pogodnog svedočanstva istinitosti potvrdnog odgovora, dokazati da sledeći problemi pripadaju klasi NP:

a) problem egzistencije potpunog podgrafa;

b) problem trgovačkog putnika;

c) problem utvrđivanja singularnosti kvadratne matrice.

2. Neka je X skup svih n-torki elemenata nekog konačnog skupa a d HAMMINGovo rastojanje. Dokazati da je uređeni par (X,d) metrički prostor.

3. Opisati proceduru za prevođenje formule kvantifikatorskog računa u preneksni normalni oblik.

4. 1° Odrediti realne brojeve A, B, C, a tako da kvadraturna formula

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = A\big(f(a) + f(-a)\big) + Bf(0) + Cf''(0) + R(f)$$

ima najveću algebarsku tačnost.

2° Odrediti algebarski stepen tačnosti.

5. Data je diferencijalna jednačina $y' = x - y^2$, sa početnim uslovom $y(0) = 0$.

1° Razviti algoritam za rešavanje ove jednačine na segmentu $[0, 5]$, pri čemu greška u svakom koraku mora da bude manja od 10^{-6}.

2° Naći dva prva (nenulta) člana TAYLORovog razvoja partikularnog rešenja u okolini tačke $x = 0$.

3° Dokazati da odgovarajuća partikularna kriva za $x > 0$ ne seče pravu $y = 0$ i parabolu $x = y^2$.

6. Drugi NEWTONov interpolacioni polinom.

7. Izračunati integral $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\sin t)\cos 2t\,\mathrm{d}t$.

UPUTSTVO: Razviti funkciju $\cos(\sin t)$ u FOURIERov red.

8. Polazeći od funkcije generatrise HERMITEovih polinoma, izvesti izraz za HERMITEov polinom $H_n(x)$ u kome se pojavljuje n-ti izvod jedne funkcije. Na osnovu tog izraza eksplicitno odrediti $H_n(x)$ za $n = 0, 1, 2, 3$.

17. rok — 24. septembar 1997.

1. Ispitati da li je polinom $x^2 + 1$ ireducibilan nad poljem $GF(3)$. Konstruisati CAYLEYevu tablicu multiplikativne grupe polja $GF(9)$.

2. Predstaviti kvantifikatorsku formulu

$$(\forall x)\,(\exists y)\,(P(x) \Rightarrow Q(y)) \Leftrightarrow (\exists x)\,R(x)$$

pomoću skupa sastavaka.

3. Definicija i primer rekurzivne funkcije.

4. Razviti operator D^2 po stepenima operatora ∇ i primenom izvedene formule izračunati $f''(0)$ na osnovu sledećih podataka

x	-3	-2	-1	0
$f(x)$	-19	-1	5	5

5. Data je diferencijalna jednačina $y'' = 1 - 2y^3$, sa početnim uslovima $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

1° Razviti algoritam za rešavanje ove jednačine na segmentu $[0,1]$, pri čemu greška u svakom koraku mora da bude manja od 10^{-6}.

2° Predložiti postupak za precizno nalaženje one vrednosti $x\,(>0)$ za koju y dostiže prvi maksimum.

3° Naći dva prva (nenulta) člana TAYLORovog razvoja partikularnog rešenja u okolini tačke $x = 0$.

6. Izvesti trotačkastu GAUSS–LEGENDREovu kvadraturnu formulu.

7. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$4x^2y'' + 4xy' + (4x^2 - 9)y = 0$$

i izraziti ga pomoću elementarnih funkcija.

8. Polazeći od funkcije generatrise LEGENDREovih polimoma, izvesti BONNETovu i CHRISTOFFELovu rekurentnu relaciju.

18. rok 15. oktobar 1997.

1. Ispitati da li su sledeće funkcije rekurzivne:

$$1^\circ \quad f_1(x,y) = x \cdot y, \qquad 2^\circ \quad f_2(x) = x!, \qquad 3^\circ \quad f_3(x) = x^x.$$

2. Proveriti da li u polju karakteristike p važi relacija

$$(x+y)^p = x^p + y^p.$$

3. Definicija i primer formalne teorije.

4. Funkcija $f(x)$ tabelirana je u tačkama x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 sa korakom h. Njene vrednosti u ovim tačkama su redom f_0, f_1, f_2, f_3, f_4. Izvesti formule za izračunavanje $f'(x_0), f''(x_0), f'''(x_0), f''''(x_0)$ pomoću navedenih vrednosti funkcije.

5. Formirati algoritam za precizno izračunavanje površine slike ograničene krivom $y = \cos x$ i pravama $y = x$ i $y = -x$.

6. AITKENov pasivni i aktivni metod.

7. Polazeći od razvoja funkcije generatrise BESSELovih funkcija i stavljanjem u taj razvoj $t = i$, proveriti jednakosti:

$$\cos x = J_0(x) - 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}J_{2n}(x), \quad \sin x = 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}J_{2n-1}(x).$$

8. HERMITEovi polinomi. Rekurentne relacije i diferencijalna jednačina.

19. rok 5. novembar 1997.

1. Odrediti kompleksnost algoritma za izračunavanje determinante reda n
a) ako se determinanta izračunava po definiciji,
b) ako se determinanta transformiše u trougaoni oblik.

2. a) Izvršiti skolemizaciju formule

$$(\exists x)\,(\forall y)\,(\exists z)\,(\forall u)\,(\exists v)\,P(x,y,z,u,v,w).$$

b) Da li postoji unifikator skupa literala $\{Q(x,y,z), Q(f(y),a,x)\}$?
c) Odrediti kompoziciju supstitucija

$$\theta = \{f(y)/x, z/y\} \text{ i } \delta = \{a/x, b/y, y/z\}.$$

3. Dokazati da konačno polje ima p^k elemenata, gde je p prost a k prirodan broj.

4. Polinom trećeg stepena tabeliran je na sledeći način:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$P_3(x)$	1	1	4	13	37	81	151	253	393

1° Ako se zna da je jedan podatak pogrešan, ispraviti ga i odrediti polinom $P_3(x)$.

2° Izračunati $P_3'(0)$ pomoću neispravljene, a zatim pomoću ispravljene tablice konačnih razlika.

5. Data je diferencijalna jednačina $y'' + y^2y' - x^2y + 1 = 0$ sa početnim uslovima $y(0) = 1, y''(0) = 0$.

Primenom Runge–Kutta metoda četvrtog reda razviti algoritam za numeričko rešavanje ove jednačine na segmentu $[0,1]$, tako da greška u svakom koraku bude manja od 10^{-6}.

6. Rombergov metod numeričke integracije.

7. Dokazati jednakosti

$$\int_0^{+\infty} J_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} J_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} J_4(x)\,\mathrm{d}x = \cdots,$$

gde je J_k Besselova funkcija prve vrste.

(Primeniti $J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J_\nu'(x)$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} J_\nu(x) = 0$).

8. Polazeći od formule

$$L_n(x) = e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\,(x^n e^{-x}) \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

izvesti eksplicitni izraz za Laguerreov polinom $L_n(x)$.

20. rok 6. mart 1998.

1. Proveriti da li u polju karakteristike p važi relacija

$$(x+y)^p = x^p + y^p.$$

2. Neka je X skup svih n-torki elemenata nekog konačnog skupa a d HAMMINGovo rastojanje. Dokazati da je uređeni par (X, d) metrički prostor.

3. Opisati 3-optimalnu heuristiku za problem trgovačkog putnika.

4. Polinom $P_n(x)$ je tabeliran na sledeći način:

x	$P_n(x)$	x	$P_n(x)$	x	$P_n(x)$
0.8	1.887	1.1	1.968	1.4	1.455
0.9	1.972	1.2	1.871	1.5	1.124
1.0	1.999	1.3	1.702	1.6	0.703

1° Ako se zna da je jedan podatak pogrešan, ispraviti ga, pri čemu polinom ima najmanji mogući stepen.

2° Naći polinom $P_n(x)$.

5. Data je diferencijalna jednačina $2y''(x) = 1 + 3y^2$ sa početnim uslovima $y(0) = y'(0) = 0$.

1° Primenom RUNGE–KUTTA metoda četvrtog reda razviti algoritam za rešavanje ove jednačine na segmentu $[0, 2]$ sa greškom koja u svakom koraku nije veća od 10^{-6}.

2° Kako bi se precizno odredila ona vrednost x za koju je $y = 2$?

6. NEWTON–RAPHSONov metod za rešavanje jednačine $f(x) = 0$ (izvođenje, brzina konvergencije, geometrijska predstava, nedostaci).

7. Primenom rekurentnih formula BESSELovih funkcija prikazati izvode $\dfrac{\mathrm{d}^2 J_n}{\mathrm{d}x^2}$ i $\dfrac{\mathrm{d}^3 J_n}{\mathrm{d}x^3}$ pomoću linearnih kombinacija funkcija $J_{n-3}, J_{n-2}, J_{n-1}, J_n, J_{n+1}, J_{n+2}, J_{n+3}$.

8. Polazeći od funkcije generatrise LEGENDREovih polinoma, izvesti rekurentne relacije za ove polinome.