ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET U BEOGRADU

Katedra za primenjenu matematiku **1.7.1998.**

MATEMATIKA IV

1. Polazeći od činjenice da su aritmetičke funkcije $f_1(x,y) = x+y$, $f_2(x,y) = x \cdot y$ i $f_3(x,y) = x^y$ rekurzivne dokazati rekurzivnost sledećih aritmetičkih funkcija

$$g(x,y) = \begin{cases} x-y, & x \geq y \\ 0, & x < y \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad F(x) = [(2+\sqrt{3})x]$$

Napomena. Za funkciju $g(x,y)$ može se, bez dokaza, koristiti jednakost $g(x,y+1) = g(g(x,y),1)$.

2. Nad azbukom koja sadrži p simbola konstruisan je savršen kod C sa kodnim rečima dužine n i kodovskim rastojanjem d, pri čemu je d neparan broj.

a) Odrediti broj kodnih reči koda C.

b) Da li je uslov pakovanja kugli zadovoljen za $n = 23$, $p = 2$, $d = 7$ i $n = 11$, $p = 3$, $d = 5$?

3. Opisati prevođenje formule kvantifikatorskog računa u preneksni normalni oblik.

4. Odrediti koeficijente A, B, C tako da formula

$$\int_0^1 f(x)\,dx = A\big(f(0) + f(\tfrac{1}{2}) + f(1)\big) + Bf'(0) + Cf'(1) + R(f)$$

važi za polinome što višeg stepena. Primenom dobijene formule izračunati približnu vrednost integrala $J = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$ i izračunati grešku.

5. a) Neka je dat sistem

$$f(x,y) = 0,$$
$$g(x,y) = 0.$$

Dokazati da se, prema NEWTONovom metodu, niz iteracija za približno rešenje prethodnog sistema može odrediti rekurentnim formulama

$$x_{n+1} = x_n - \frac{A_n}{J_n}, \qquad y_{n+1} = y_n - \frac{B_n}{J_n},$$

gde je J_n JACOBIjan i gde su A_n i B_n determinante određene formulama

$$A_n = \begin{vmatrix} f(x_n,y_n) & f_y'(x_n,y_n) \\ g(x_n,y_n) & g_y'(x_n,y_n) \end{vmatrix}, \qquad B_n = \begin{vmatrix} f_x'(x_n,y_n) & f(x_n,y_n) \\ g_x'(x_n,y_n) & g(x_n,y_n) \end{vmatrix}.$$

b) Primenom NEWTONovog metoda za sistem jednačina

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - x = 0,$$
$$g(x,y) = x^2 - y^2 - y = 0,$$

odrediti približno ono rešenje koje se nalazi u blizini tačke $(0.8, 0.4)$ sa tačnošću od $\varepsilon = 0.05$ u odnosu na euklidsku normu.

6. Izvesti Runge-Kutta metod drugog reda.

7. U skupu polinoma stepena ne višeg od $m = 4$ naći najbolju srednje kvadratnu aproksimaciju funkcije $f(x) = |x|$ na segmentu $[-1, 1]$ sa težinom $w(x) = 1$. Aproksimacionu funkciju Φ predstaviti u obliku:

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x),$$

gde su P_k Legendreovi polinomi.

8. Rekurentne relacije i diferencijalna jednačina za Hermiteove polinome.

NAPOMENA: DOZVOLjENA JE UPOTREBA SAMO NEPROGRAMABILNIH KALKULATORA.

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET U BEOGRADU **16.9.1998.**

MATEMATIKA IV

1. **a)** Prevesti u skup sastavaka kvantifikatorsku formulu

$$(\exists x)(\forall y)P(x,y) \ \wedge \ (\exists x)(\forall y)Q(x,y,z).$$

b) Da li postoje unifikatori sledećih skupova literala:

$$S_1 = \{ \ f(x,g(x)), \ f(g(y),y) \ \} \qquad S_2 = \{ \ Q(x,y,z), \ Q(f(y),a,x) \ \} \ ?$$

2. Neka je data kvadratna matrica $A_{n\times n}$. Predložiti po jedan algoritam za rešavanje sledećih problema:

a) izračunavanje matrice A^2

b) ispitivanje da li je data matrica regularna

i odrediti kompleksnost predloženih algoritama.

3. Dokazati da konačno polje ima p^k elemenata gde je p prost broj a k prirodan broj.

4. Primenom prvog Newtonovog interpolacionog polinoma izračunati

a) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{3n} k^2,$

b) $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{3n} (-1)^k k^2.$

5. Data je diferencijalna jednačina

$$y' - y = x^2.$$

Metodom Runge-Kutta drugog reda naći približno rešenje diferencijalne jednačine na intervalu $[0, 0.5]$, pri početnom uslovu $y(0) = 1$, uzimajući korak $h = 0.1$.

6. Pasivni i aktivni Aitkenov δ^2- metod.

7. Polazeći od funkcije generatrise izvesti integralni izraz za Besselovu funkciju indeksa n.

8. Rešavanjem Hermiteove diferencijalne jednačine izvesti eksplicitan izraz za Hermite-ov polinom.

NAPOMENA: DOZVOLjENA JE UPOTREBA SAMO NEPROGRAMABILNIH KALKULATORA.

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET U BEOGRADU **07.10.1998.**

MATEMATIKA IV

1. Ispitati svodljivost polinoma:

$$\textbf{a)}\quad p(x) = x^2+1 \qquad\qquad \textbf{b)}\quad q(x) = x^3+3x^2+x+3$$

nad poljem $GF(7)$.

2. Mreža $(S,\leq)$ predstavljena je HASSEovim dijagramom na slici.

a) Konstruisati odgovarajuću A-mrežu.
b) Odrediti jedan skup parcijalno uređen inkluzijom koji je izomorfan parcijalno uređenom skupu $(S,\leq)$.

3. Definicija rezolvente dva sastavka.

4. Izračunati sa tačnošću od $\varepsilon = 10^{-4}$ najmanji pozitivni koren jednačine

$$100\sin x = x.$$

5. Diskretnom srednje kvadratnom aproksimacijom (METOD NAJMANJIH KVADRATA) odrediti parametre a, b, c u aproksimacionoj funkciji $\Phi(x) = ax^2+bx+c$ za sledeći skup podataka:

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	-2	1	2	4	8

Odrediti vrednost srednje kvadratne greške $\sigma = \sqrt{\sum_{i=0}^{4} |f(x_i)-\Phi(x_i)|^2}$.

6. Adams-Bešfortova prediktor formula.

7. Dokazati da BESSELova funkcija zadovoljava BESSELovu diferencijalnu jednačinu.

8. Polazaći od funkcije generatrise izvesti izraz za Čebiševljev polinom.

NAPOMENA: DOZVOLjENA JE UPOTREBA SAMO NEPROGRAMABILNIH KALKULATORA.

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET U BEOGRADU **20.10.1998.**

MATEMATIKA IV

1. Date su premise:

$P_1 : (\forall x)(A(x) \Longrightarrow (\forall y)(B(y) \Longrightarrow \neg C(x,y))),$

$P_2 : (\exists x)(A(x) \wedge (\forall y)(D(y) \Longrightarrow C(x,y))).$

Dokazati, primenom principa rezolucije, da zaključak

$F : (\forall x)(D(x) \Longrightarrow \neg B(x))$

sledi iz datih premisa.

2. **a)** Dokazati da za svaki element x polja $GF(n)$ koji je različit od 0 važi relacija $x^{n-1}=1$.

b) Dokazati da je polinom $x^n - x$ nad poljem $GF(n)$ identički jednak 0.

3. Definicija i primer rekursivne funkcije.

4. Operatore D i $D^2 = D \cdot D$ razviti po stepenima operatora ∇. Ako je polinom $P_3(x)$ dat tabelom

x	-3	-2	-1	0
$P_3(x)$	-18	-4	0	0

primenom izvedene formule za D^2 izračunati $P_3''(0)$. Proveriti dobijen rezultat formiranjem drugog NEWTONovog interpolacionog polinoma.

5. Odrediti koeficijente A, B i argumente x_1, x_2 tako da formula:

$$\int_{-1}^{1} (1+|x|)f(x)\,dx = Af(x_1) + Bf(x_2) + R(f)$$

važi za polinome što višeg stepena. Primenom dobijene formule izračunati približnu vrednost integrala $J = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1+|x|)\log\frac{2-x}{2+x}\,dx$ i odrediti grešku.

6. Opisati STEFFENSENov metod. Dokazati da STEFFENSENov metod ima najmanje kvadratnu konvergenciju.

7. Polazeći od funkcije generatrise izvesti reprezentaciju BESSELove funkcije $J_n(x)$ $(n \in N)$ pomoću stepenog reda. Kako se definiše BESSELova funkcija proizvoljnog indeksa ν.

8. Izvesti rekuretne relacije za LEGENDREove polinome.

NAPOMENA: DOZVOLjENA JE UPOTREBA SAMO NEPROGRAMABILNIH KALKULATORA.

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET U BEOGRADU **10.02.1999.**

MATEMATIKA IV

1. Opisati 3-optimalnu heuristiku za problem trgovačkog putnika i proceniti njenu algoritamsku kompleksnost.

2. a) Konstruisati savršen kod nad binarnom azbukom, sa kodnim rečima dužine 7, koji može da ispravi najviše 3 greške.

b) Dešifrovati vektore: 1110101, 1010111, 0111010.

3. Turingova mašina za probleme odlučivanja.

4. Funkciju $x \mapsto |x|$ aproksimirati interpolacionim polinomom, pri čemu se uzima 5 čvorova sa apscisama -2, -1, 0, 1, 2.

Integracijom interpolacionog polinoma izračunati približnu vrednost integrala $\displaystyle\int_{-2}^{2} |x|dx$ i odrediti grešku.

5. **a)** Naći rešenja sistema jednačina:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= y - \cos x &= 0 \\ f_2(x,y) &= y - |x| &= 0 \end{aligned}$$

sa tačnošću $\varepsilon = 0.001$.

b) Naći približno površinu ograničenu krivom $y = \cos x$ i pravama $y = x$ i $y = -x$.

6. Izvesti Runge-Kutta metod drugog reda.

7. Polazeći od funkcije generatrise izvesti integralni izraz za Besselovu funkciju indeksa n ($n \in Z$).

8. Rekurzivne relacije za Legendreove polinome.

NAPOMENA: DOZVOLjENA JE UPOTREBA SAMO NEPROGRAMABILNIH KALKULATORA.

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET U BEOGRADU **3.07.1999.**

MATEMATIKA IV

1. Neka je D skup delilaca broja 24.

a) Ispitati da li je $(D, |)$ parcijalno uredjen skup i ako jeste, predstaviti ga HASSEovim dijagramom.

b) Ispitati da li je $(D, |)$ $\mathcal{S}$-mreža i ako jeste, konstruisati odgovarajuću $\mathcal{A}$-mrežu.

2. Data je TURINGova mašina čija je azbuka $\mathcal{A} = \{0, 1, b\}$ (b je blanko simbol) i $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_+, q_-\}$ skup unutrašnjih stanja upravljačkog mehanizma. Ulazni podatak je konačan niz simbola iz skupa $\{0, 1\}$ koji se upisuju redom u ćelije trake $1, 2, \ldots$. Upravljački mehanizam se na početku rada nalazi u stanju q_0, a glava iznad ćelije 1. Dopuniti sledeći program za TURINGovu mašinu koji utvrđuje da li se u ulaznom podatku simbol 1 javlja tačno dva puta.

	0	1	b
q_0		$(1, q_1, +1)$	
q_1		$(1, q_2, +1)$	
q_2	$(0, q_2, +1)$		

3. Definicija i primer formalne teorije.

4. Dokazati da su operatori

$$A = \Delta \cdot (1 + \frac{1}{2}\Delta) \cdot (1 + \Delta)^{-1}, \quad B = \nabla \cdot (1 - \frac{1}{2}\nabla) \cdot (1 - \nabla)^{-1} \quad \text{i} \quad C = \mu \cdot \delta$$

međusobno ekvivaletni.

5. Neka je data diferencijalna jednačina

$$y' = \frac{2}{x} \cdot y + x,$$

sa početnim uslovom $y(1) = 0$. Koristeći se metodom RUNGGE-KUTTA četvrtog reda aproksimirati vrednosti $y(1.1)$ i $y(1.2)$ sa y_1 i y_2.

6. Opisati ROMBERGov metod numeričke integracije.

7. Polazeći od funkcije generatrise izvesti izraz za LEGENDREov polinom.

8. Rekuretne relacije za BESSELove funkcije. Navesti dokaz tačnosti jednne od relacija.

NAPOMENA: DOZVOLjENA JE UPOTREBA SAMO NEPROGRAMABILNIH KALKULATORA.

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET U BEOGRADU **15.09.1999.**

MATEMATIKA IV

1. Koristeći princip rezolucije dokazati da je sledeća formula valjana:

$$(\exists y)(\forall x)R(z,y,x) \;\Rightarrow\; (\forall x)(\exists y)R(z,y,x).$$

2. Ispitati svodljivost sledećih polinoma nad poljem $GF(7)$:

a) $p(x) = 3x^2 + 6,$ **b)** $q(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 6.$

3. "Dobri" i "loši" algoritmi: definicije i primeri.

4. Polinom trećeg stepena $P_3(x)$ tabeliran je na sledeći način:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$P_3(x)$	-1	1	1	8	27	64	125	216

Ako se zna da je jedan podatak pogrešan, ispraviti ga i odrediti polinom $P_3(x)$. Izračunati $P_3'(0)$ direktno i pomoću odgovarajuće operatorske jednakosti.

5. a) Odrediti LAPLACEovu transformaciju funkcije $f(t) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2+a^2}dx$ za $t \geq 0, a > 0$.

Pokazati da je tačno $f(t) = \dfrac{\pi}{2a} \cdot e^{-at}$.

b) U zavisnosti od parametra a $(a > 0)$ numerički odrediti fiksne tačke funkcije $f(t)$ uopštenim NEWTONovim metodom trećeg reda sa 6 tačnih decimala.

6. Izvesti Adams-Bešfortovu prediktor formulu trećeg reda i iz nje Adamsovu formulu.

7. Polazeći od funkcije generatrise Čebiševljevih polinoma $T_n(x)$ $(n = 0, 1, ...)$ dokazati da je $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

8. Polazeći od generatrise za BESSELove funkcije dokazati rekurentne relacije:

a) $\dfrac{z}{2}(J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)) \;=\; nJ_n(z),$ **b)** $\dfrac{1}{2}(J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)) \;=\; J_n'(z)$

gde je $J_n(z)$ $(n \in Z)$ BESSELova funkcija.

NAPOMENE:
- **Deo a) ZADATKA 5. rade SAMO studenti koji su položili MAT 3 u januarskom ispitnom roku 1999.**
- **Na koricama zadatka naznačiti u kom ispitnom roku je položena MAT 3.**
- **Ispit traje 4 sata.**
- **Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET U BEOGRADU **6.10.1999.**

MATEMATIKA IV

1. **a)** Neka je data realna vektorska funkcija:

$$\vec{f}(x,y,z)=\big(f_1(y,z),f_2(z,x),f_3(x,y)\big)=\Big(\sum_{j+k=m} a_{j,k}y^j z^k,\ \sum_{i+k=m} b_{i,k}x^i z^k,\ \sum_{i+j=m} c_{i,j}x^i y^j\Big),$$

za $a_{j,k}, b_{i,k}, c_{i,j} \neq 0$. U zavisnosti od prirodnog broja m odrediti kompleksnost računanja vrednosti vektorske funkcije rotora:

$$\operatorname{rot}\vec{f}(x,y,z)=\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k},$$

u tački $(x_0,y_0,z_0)\in \boldsymbol{R}^3\backslash\{\mathbf{0}\}$.

b) Odrediti konstante $a,b,c\in\boldsymbol{R}$ tako da vektorska funkcija:

$$\vec{f}(x,y,z)=(2y+az,bx-z,4x+cy)$$

određuje Laplaceovo polje.

2. Nad poljem $GF(3)$ dat je skup reči $\mathcal{A}=\{1002,\ 1220,\ 0100,\ 1111,\ 2122,\ 0021,\ 0212\}$.

a) Dopuniti ovaj skup rečima iz skupa $\mathcal{B}=\{2222,\ 0021,\ 2201,\ 1110,\ 2010,\ 1102\}$ tako da se dobije savršen kod.

b) Dešifrovati vektore: 2011, 2201, 1020.

3. Definicije atoma, literala, komplementarnih literala, sastavka i praznog sastavka. Navesti po jedan primer za svaki od definisanih pojmova.

4. Rešiti sistem jednačina:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x,y)=x^3+y^3-3xy=0 \\ \\ g(x,y)=\sqrt[4]{x}-y=0 \end{array}\right\}$$

na šest tačnih decimala znajući da postoji jedno rešenje u okolini tačke $(x_0,y_0)=(1.6,1.1)$.

5. U zavisnosti od $b > 0$ odrediti koeficijente A_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ u kvadraturnoj formuli:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A_1 f(-1) + A_2 f(1) + A_3 f'(-b) + A_4 f'(b) + R(f), \tag{1}$$

tako da ona ima najveći stepen algebarske tačnosti. Za vrednost parametra b, sa kojim formula (1) ima maksimalni mogući stepen algebarske tačnosti, približno odrediti vrednost integrala:

$$I = \int_{0}^{\pi/2} \sin t\,dt. \tag{2}$$

6. Izvesti formulu za TAYLORov metod trećeg reda.

7. Izvesti RODRIGUESovu formulu za LEGENDREove polinome.

8. Izračunati:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} L_n(x)\,dx \qquad (\alpha > 0)$$

gde je $x \mapsto L_n(x)$ LAGUERREov polinom n-tog stepena.

NAPOMENE:
- **Deo b) ZADATKA 1. rade SAMO studenti koji su položili MAT 3 u januarskom ispitnom roku 1999.**
- **Na koricama zadatka naznačiti u kom ispitnom roku je položena MAT 3.**
- **Ispit traje 4 sata.**
- **Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET U BEOGRADU **27.10.1999.**

MATEMATIKA IV

1. Polazeći od činjenice da su aritmetičke funkcije: $f_1(x,y) = x + y$, $f_2(x,y) = x \cdot y$, $f_3(x,y) = x \dot{-} y$, $f_4(x) = sgn(x)$, $f_5(x) = \overline{sgn}(x)$ i $OST(x,y) = \begin{cases} \text{ostatak deljenja x sa y}, & y \neq 0 \\ x, & y = 0 \end{cases}$ rekurzivne ispitati rekurzivnost aritmetičkih funkcija:

1)

$$P(x_1, x_2, ...x_n, y) = \begin{cases} 0, & y = 0 \\ \prod_{i=1}^{y} g(x_1, x_2, ...x_n, i), & y > 0 \end{cases},$$ gde je $g : \mathbf{N}^{n+1} \to \mathbf{N}$ rekurzivna funkcija,

2) $$F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \text{proizvod delilaca broja x}, & x > 0 \end{cases}.$$

2. Dati su skupovi literala $S_1 = \{Q(h(x), y)\}$ i $S_2 = \{\, Q(y, x)\, \}$, i supstitucije $\Lambda = \{\, a/x,\ f(z)/y,\ y/z \,\}$ i $\Theta = \{\, b/x,\ z/y,\ g(x)/z \,\}$. Odrediti supstituciju $\Lambda\Theta$ i ispitati da li postoji unifikator za skupove literala $S_1(\Lambda\Theta)$ i S_2.

3. Dokazati da konačno polje sadrži p^k elemenata gde je p prost a k prirodan broj.

4. U skupu polinoma stepena ne višeg od $m=4$ naći najbolju srednje kvadratnu aproksimaciju funkcije $f(x)=|x|$ na segmentu $[-1,1]$ sa težinom $w(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Aproksimacionu funkciju Φ predstaviti u obliku:

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k T_k(x),$$

gde su T_k ČEBIŠLJEVljevi polinomi.

5. Neka je data diferencijalna jednačina $y' = -\dfrac{xy}{1+x^2}$ sa početnim uslovom $y(0) = 2$. Koristeći se metodom RUNGE-KUTTA četvrtog reda tabelirati približno rešenje na intervalu $[0, 0.3]$ sa korakom $h=0.1$.

6. Opisati Stefensenov metod i dokazati da ima najmanje kvadratnu konvergenciju.

7. Izvesti rekurentne relacije za LEGENDREove polinome.

8. Izračunati $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)dx$ gde je $x \mapsto H_n(x)$ HERMITov polinom.

NAPOMENE:
– U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu radjeni.
– Ispit traje 4 sata.
– Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET U BEOGRADU **14.11.1999.**

MATEMATIKA IV

1. Konstruisati polje $GF(4)$ sa elementima $0, 1, \alpha, \beta$. Ispitati svodljivost polinoma $x^2 + x + \alpha$ i $x^2 + \beta x + \alpha$ nad poljem $GF(4)$.

2. Dokazati da u proizvoljnoj mreži (P, ρ) važi:
1) Ako je $x\rho y_1$, $x\rho y_2$ onda je i $x\rho(y_1 \wedge y_2)$.
2) Ako je $x_1\rho y_1$, $x_2\rho y_2$ onda je i $(x_1 \vee x_2)\rho(y_1 \vee y_2)$.

3. Definicija i primer formalne teorije.

4. Dat je niz $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Dokazati da za svako $k \in N$ važi

$$\Delta^k a_n = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k+1)}.$$

Primeniti EULERovu transformaciju na sumiranje alternativnog reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Odrediti broj članova polaznog reda i ubrzanog reda da bi granica apsolutne greške bila manja od $\varepsilon = 0.0005$.

5. Jednačina $e^z = (5 + 3i)z$ ima koren u blizini tačke $3 + i$. Naći koren jednačine sa tačnošću $\varepsilon = 0.05$.

6. Opisati ROMBERGov metod numeričke integracije.

7. Rekuretne relacije i diferencijalna jednačina za HERMITEove polinome.

8. Izračunati integral

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2) \cdot \left(P_n'(x)\right)^2 dx$$

gde je $P_n(x)$ LEGENDREov polinom.

NAPOMENE:
– U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu radjeni.
– Ispit traje 4 sata.
– Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET U BEOGRADU **19.12.1999.**

MATEMATIKA IV

1. Polazeći od činjenice da su aritmetičke funkcije: $f_1(x,y) = x+y$, $f_2(x,y) = x\cdot y$, $f_3(x) = sgn(x)$, $f_4(x) = \overline{sgn}(x)$ i $F(x,y) = \begin{cases} [\frac{x}{y}], & y \neq 0 \\ x, & y = 0 \end{cases}$ rekurzivne ispitati rekurzivnost aritmetičke funkcije $Q(x,y) = \binom{x+y}{x}$.

2. Neka je $(S, \wedge, \vee)$ A-mreža gde je $S = \{ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \}$ i operacije $\wedge$ i $\vee$ definisane tablicama:

$\wedge$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1
a_2	a_1	a_2	a_1	a_2	a_2	a_2
a_3	a_1	a_1	a_3	a_1	a_3	a_3
a_4	a_1	a_2	a_1	a_4	a_2	a_4
a_5	a_1	a_2	a_3	a_2	a_5	a_5
a_6	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6

$\vee$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_2	a_2	a_2	a_5	a_4	a_5	a_6
a_3	a_3	a_5	a_3	a_6	a_5	a_6
a_4	a_4	a_4	a_6	a_4	a_6	a_6
a_5	a_5	a_5	a_5	a_6	a_5	a_6
a_6	a_6	a_6	a_6	a_6	a_6	a_6

Konstruisati odgovarajuću S-mrežu i HASSEov dijagram.

3. HERBRANDov domen, osnovni primer sastavka, formulacija i primer primene HERBRANDove teoreme.

4. U zavisnosti od parametra a $(a > 0)$ numerički odrediti fiksne tačke funkcije

$$f(t) = \frac{\pi}{2a} e^{-(at)^2}$$

uopštenim NEWTONovim metodom 3-ćeg reda sa 6 tačnih decimala.

5. Za diferencijalnu jednačinu $y' = \dfrac{\sin x}{e^y}$ pri početnom uslovu $y(0) = 0$ odrediti prva tri člana razvoja rešenja u MACLAURINov red.

6. Izvesti NEWTON-COTESovu formulu i dati izraz za grešku.

7. Polazeći od funkcije generatrise izvesti eksplicitni izraz za CHEBISHEVljev polinom.

8. Proveriti formulu $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^n P_n(x)dx = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$ gde je $P_n(x)$ LEGENDREov polinom.

NAPOMENE:
– U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu radjeni.
– Ispit traje 4 sata.
– Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET U BEOGRADU **8.3.2000.**

MATEMATIKA IV

1. Polazeći od činjenice da su aritmetičke funkcije: $f_1(x,y) = x+y$, $f_2(x,y) = x \cdot y$, $f_3(x) = sgn(x)$, $f_4(x) = \overline{sgn}(x)$ i $F(x,y) = \begin{cases} [\frac{x}{y}], & y \neq 0 \\ x, & y = 0 \end{cases}$ rekurzivne ispitati rekurzivnost aritmetičke funkcije $Q(x,y) = \binom{x+y}{x}$.

2. Neka je $(S, \wedge, \vee)$ A-mreža gde je $S = \{ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \}$ i operacije $\wedge$ i $\vee$ definisane tablicama:

$\wedge$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1	a_1
a_2	a_1	a_2	a_1	a_2	a_2	a_2
a_3	a_1	a_1	a_3	a_1	a_3	a_3
a_4	a_1	a_2	a_1	a_4	a_2	a_4
a_5	a_1	a_2	a_3	a_2	a_5	a_5
a_6	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6

$\vee$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_2	a_2	a_2	a_5	a_4	a_5	a_6
a_3	a_3	a_5	a_3	a_6	a_5	a_6
a_4	a_4	a_4	a_6	a_4	a_6	a_6
a_5	a_5	a_5	a_5	a_6	a_5	a_6
a_6	a_6	a_6	a_6	a_6	a_6	a_6

Konstruisati odgovarajuću S-mrežu i HASSEov dijagram.

3. HERBRANDov domen, osnovni primer sastavka, formulacija i primer primene HERBRANDove teoreme.

4. U zavisnosti od parametra a $(a > 0)$ numerički odrediti fiksne tačke funkcije

$$f(t) = \frac{\pi}{2a} e^{-(at)^2}$$

uopštenim NEWTONovim metodom 3-ćeg reda sa 6 tačnih decimala.

5. Za diferencijalnu jednačinu $y' = \dfrac{\sin x}{e^y}$ pri početnom uslovu $y(0) = 0$ odrediti prva tri člana razvoja rešenja u MACLAURINov red.

6. Izvesti NEWTON-COTESovu formulu i dati izraz za grešku.

7. Polazeći od funkcije generatrise izvesti eksplicitni izraz za CHEBISHEVljev polinom.

8. Proveriti formulu $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^n P_n(x) dx = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$ gde je $P_n(x)$ LEGENDREov polinom.

NAPOMENE:
– U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu radjeni.
– Ispit traje 4 sata.
– Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET U BEOGRADU **26.04.2000.**

MATEMATIKA IV

1. Konstrukcijom pogodnog svedočanstva istinitosti potvrdnog odgovora dokazati da sledeći problemi pripadaju klasi NP:
a) problem egzistencije potpunog podgrafa sa k čvorova u datom grafu sa n čvorova;
b) problem utvrđivanja da li formula (koja sadrži n iskaznih slova i m operacijskih simbola, gde je $m < n^2$) iskazne algebre nije tautologija.

2. a) Izvršiti skolemizaciju formule $(\forall x)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)Q(x,y,z)$;
b) Da li postoje unifikatori sledećih skupova literala:

$$S_1 = \{\ R(x, h(x), c),\ R(h(g(z)), x_1, y)\ \}, \quad S_2 = \{\ f(h(g(z)), y, x),\ f(x, h(x), c)\ \}?$$

3. Dokazati da je karakteristika konačnog polja prost broj.

4. Sa kojom tačnošću se može izračunati vrednost $\sqrt[3]{1580}$ pomoću interpolacionog polinoma ako su zadani čvorovi interpolacije $x_0 = 1000$, $x_1 = 1330$ i $x_2 = 1728$?

5. Primenom ČEBIŠLJEVljeve kvadraturne formule za $m = 6$ približno izračunati:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^6}}.$$

6. Uopštena NEWTON-ova formula.

7. Dokazati da je $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_1(x\cos\theta)d\theta = \frac{1-\cos x}{x}$ gde je $z \mapsto J_1(z)$ BESSEL-ova funkcija prve vrste.

8. Izvesti RODRIGNES-ovu formulu za LEGENDRE-ove polinome.

NAPOMENE:
– U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu radjeni.
– Ispit traje 4 sata.
– Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET U BEOGRADU **24.07.2000.**

MATEMATIKA IV

1. Metodom rezolucije dokazati da je formula $(\exists x)(S(x) \wedge \neg Q(x))$ posledica formula $(\forall x)(\, P(x) \Rightarrow (\forall y)(Q(y) \Rightarrow \neg R(x,y))\,)$, $(\forall x)(\, P(x) \Rightarrow (\exists y)(S(y) \wedge R(x,y))\,)$, $(\exists x)P(x)$.

2. Nad poljem $GF(3)$ dati su skupovi reči $\mathcal{C}_1 = \{1002, 1220, 0100, 1111, 2122, 0021, 0212\}$ i $\mathcal{C}_2 = \{2222,\ 0021,\ 2201,\ 1110,\ 2010,\ 1102\,\}$.
a) Dopuniti skup $\mathcal{C}_1$ rečima iz skupa $\mathcal{C}_2$ tako da se dobije savršen kod.
b) Dešifrovati vektore: 2011, 2201, 1020.

3. TURINGova mašina.

4. Dat je niz $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Dokazati da za svako $k \in N$ važi

$$\Delta^k a_n = \frac{(-1)^k (2k)!!}{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+(2k+1))}.$$

Primeniti EULERovu transformaciju na sumiranje alternativnog reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$.
Odrediti broj članova polaznog reda i ubrzanog reda da bi granica apsolutne greške bila manja od $\varepsilon = 0.001$.

5. Odrediti A, B, C u kvadraturnoj formuli

$$(*) \qquad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = Af(-C) + Bf(0) + Af(C) + R(f)$$

tako da ona ima najveći stepen algebarske tačnosti. Približno izračunati integral

$$I = \int_{-1}^{1} \log\frac{2-x}{4+x}\,dx.$$

primenjujući formulu $(*)$ na intervalima $[-1, 0]$ i $[0, 1]$ respektivno.

6. Izvesti MILNEovu formulu.

7. **a)** Dokazati rekurentnu relaciju za LAGUERREove polinome

$$L_{n+1}(x) + (x - 2n - 1)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0.$$

b) Izračunati integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-x} L_n(x) L_{n-1}(x) dx.$

8. Polazeći od funkcije generatrise izvesti izraz za LEGENDREov polinom.

NAPOMENE:
– U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu radjeni.
– Ispit traje 4 sata.
– Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – BEOGRAD **20.9.2000.**

Katedra za matematiku primenjenu u elektrotehnici

MATEMATIKA IV

1. Dat je skup $S = \{2, 3, 5, 6, 7, 11, 12, 35, 385\}$.
1^0. Ispitati da li je uredjen par $(S, |)$, gde je $|$ relacija deljivosti, mreža.
2^0. Nacrtati HASSEov dijagram strukture $(S, |)$.
3^0. Odrediti najmanji, najveći, minimalni i maksimalni element (elemente) strukture $(S, |)$.

2. Dati su skupovi literala $A = \{P(x, u, y)\}$ i $B = \{\, P(x, h(u), f(x))\,\}$, i supstitucije $\Lambda = \{\, a/x,\ f(z)/y,\ y/z\,\}$ i $\Theta = \{\, b/x,\ h(z)/u,\ z/y,\ g(x)/z\,\}$. Odrediti supstituciju $\Lambda\Theta$ i ispitati da li postoji unifikator za skupove literala $A(\Lambda\Theta)$ i B.

3. Pregled definicija u vezi sa klasom problema NP.

4. NEWTON-RAPHSONovim metodom, sa tačnošću od $\varepsilon = 10^{-5}$, odrediti najmanje $c > 0$ sa osobinom da tangenta iz tačke $(c, \sin c)$, sinusoide $y = \sin x$, prolazi kroz koordinatni početak $(0, 0)$.

5. Data je diferencijalna jednačina $y' - y = x^2$. Metodom RUNGE - KUTTA četvrtog reda naći približno rešenje diferencijalne jednačine na intervalu $[0, 0.3]$, pri početnom uslovu $y(0) = 1$, uzimajući korak $h = 0.1$.

6. Funkcija $x \mapsto f(x)$ tabelirana je, sa korakom $h > 0$, u ekvidistatnim tačkama $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$. Dokazati aproksimaciju:

$$f'(x_2) \approx \frac{1}{12h}\Big(f_0 - 8f_1 + 8f_3 - f_4\Big).$$

7. Polazeći od funkcije generatrise izvesti izraz za LAGUERREov polinom u kome se pojavljuje n-ti izvod jedne funkcije.

8. 1^0. Dokazati da sferna BESSELova funkcija $J_{-1/2}(x)$ zadovoljava jednakost

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos x.$$

2^0. Koristeći jednakost iz tačke 1^0. izraziti BESSELovu funkciju $J_{-3/2}(x)$ u konačnom obliku pomoću elementarnih funkcija.

NAPOMENE:
– U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu radjeni.
– Ispit traje 4 sata.
– Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

11.10.2000.

MATEMATIKA 4

1. U zavisnosti od prirodnog broja n i uzimajući operacije sabiranja i množenja za elementarne korake, odrediti kompleksnost računanja vrednosti funkcije

$$F_(x,y) = \sum_{\substack{i+j=n \\ 2i<n}} a_{i,j} x^i y^j \qquad \text{u datoj tački } (x_0, y_0).$$

2. Konstruisati CAYLEYeve tablice operacija u polju GF(4) sa elementima $\{0, 1, a, b\}$. Neka su $p(x) = x^2 + bx + a$ i $q(x) = ax^2 + x + b$ polinomi nad poljem GF(4).

1) Izračunati $p(x) \cdot q(x)$.
2) Izračunati $p(\, -a^{-1}b \,)$.
3) Ispitati svodljivost polinoma $p(x)$ nad poljem GF(4).

3. Skolemizacija.

4. Za diferencijalnu jednačinu $y' = x^2y^2 - 1$, pri početnom uslovu $y(0) = 1$, odrediti prvih pet članova razvoja rešenja u MACLAURINov red.

5. Izračunati sa tačnošću $\varepsilon = 0.01$ integral: $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx.$

6. Izvesti uopštenu NEWTONovu formulu.

7. **a)** Dokazati da polinom $x \mapsto P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ zadovoljava LEGENDREovu diferencijalnu jednačinu

$$(1) \qquad (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

b) Polazeći od jednačine (1) dokazati da je $\displaystyle\int_{-1}^{-1} P_m(x)P_n(x)\, dx = 0 \ (m \neq n).$

8. Rekurentne relacije i diferencijalna jednačina za HERMITEove polinome.

NAPOMENA:

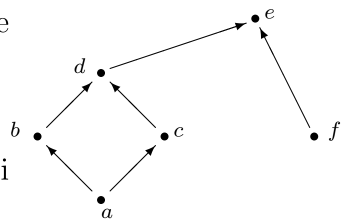
- **Ispit traje 4 sata.**
- **Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu radjeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

8.11.2000.

MATEMATIKA 4

1. Na slici je prikazan HASSEov dijagram strukture (A, ρ) gde je skup $A = \{a, b, c, d, e, f\}$.



1) Ispitati da li je uredjen par (A, ρ) mreža.

2) Odrediti najmanji, najveći, minimalni i maksimalni element (elemente) strukture (A, ρ).

2. Neka je $\mathcal{C}$ blokovski $(n, m)-$kod konstruisan nad poljem $GF(q)$.

1) Neka je $c \in \mathcal{C}$, $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ i $n > r_2 > r_1$. Odrediti $card(\, K(c, r_2) \backslash \overline{K}(c, r_1)\,)$.

2) Neka su $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ takve da je $d(c_1, c_2) = 2$. Odrediti reči koje pripadaju skupu $(\, \overline{K}(c_1, 1) \cap \overline{K}(c_2, 1)\,)$.

3. Svodjenje formule kvantifikatorskog računa na preneksni normalni oblik.

4. Neka su za dva puta neprekidno diferencijabilnu funkciju f date vrednosti:

$$f(x_0) = 1, f(x_1) = 2, f(x_2) = 3, f^{'}(x_0) = 0, f^{'}(x_2) = -1$$

redom u čvorovima $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$. Za interpolacionu funkciju:

$$S(x) = \begin{cases} a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3 & : \quad x \in [x_0, x_1] \\ a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3 & : \quad x \in [x_1, x_2] \end{cases}$$

odrediti nepoznate koeficijente $a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, 1)$ tako da važi:

1) $S(x_0) = f(x_0)$, $S(x_1) = f(x_1)$ i $S(x_2) = f(x_2)$,

2) $S^{'}(x_0) = f^{'}(x_0)$ i $S^{'}(x_2) = f^{'}(x_2)$,

3) funkcija S jeste dva puta neprekidno diferencijabilna u tački x_1.

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

2.12.2000.

MATEMATIKA 4

1. **a)** Odrediti kompoziciju $\rho\,\sigma$ za date supstitucije $\rho = \{y/x, f(z)/y, a/z, w/u\}$ i $\sigma = \{a/x, u/y, u/w\}$.

b) Da li postoji unifikator za skup literala $\big\{P\big(x, f(y), u, h(u,u)\big)\rho\sigma, P\big(y, f(x), a, h(x,z)\big)\big\}$?

2. Neka je $\mathcal{C}$ blokovski $(n,m)-$kod konstruisan nad poljem $GF(q)$.

a) Neka je $c \in \mathcal{C}$, $\;r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ i $n > r_2 > r_1$. Odrediti $card(\,K(c,r_2) \setminus \overline{K}(c,r_1)\,)$.

b) Neka su $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ takve da je $d(c_1,c_2) = 2$. Odrediti reči koje pripadaju skupu $(\,\overline{K}(c_1,1) \cap \overline{K}(c_2,1)\,)$.

3. Definicija rekursivne funkcije.

4. Polinom trećeg stepena $P_3(x)$ tabeliran je na sledeći način:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$P_3(x)$	-100	-78	-50	-10	50	130	242	390

Ako se zna da je jedan podatak pogrešan, ispraviti ga i odrediti polinom $P_3(x)$. Izračunati $P_3'(0)$ direktno i pomoću odgovarajuće operatorske jednakosti.

5. Data je diferencijalna jednačina $y' = 2 - \dfrac{y}{x}$, sa početnim uslovom $y(1) = 3$. PICARDovim metodom aproksimirati $y(3)$ sa trećom sukcesivnom aproksimacijom $y_3(3)$.

6. Opisati ROMBERGov metod numeričke integracije.

7. Koristeći rekuretne relacije za BESSELove funkcije prve vrste dokazati jednakost

$$\frac{d}{dx}\Big(x^\nu J_\nu(ax)\Big) = ax^{\nu-1} J_{\nu-1}(ax).$$

Na osnovu toga izračunati integral

$$\int_0^t x^{\nu-1} J_{\nu-1}(ax) dx \qquad (\nu > 0).$$

8. Polazeći od funkcije generatrise ČEBIŠEVLJEVljevih polinoma $T_n(x)$ izvesti formulu

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

NAPOMENA:
- **Ispit traje 4 sata.**
- **Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu radjeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

7.3.2001.

MATEMATIKA 4

1. Metodom rezolucije dokazati da je formula $(\exists x)(S(x) \wedge \neg Q(x))$ posledica formula $(\forall x)(P(x) \Rightarrow (\forall y)(Q(y) \Rightarrow \neg R(x, y)))$, $(\forall x)(P(x) \Rightarrow (\exists y)(S(y) \wedge R(x, y)))$, $(\exists x)P(x)$.

2. Neka je $\mathcal{C}$ blokovski $(n, m)-$kod konstruisan nad poljem $GF(q)$.

a) Neka je $c \in \mathcal{C}$, $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ i $n > r_2 > r_1$. Odrediti $card(\ K(c, r_2) \backslash \overline{K}(c, r_1)\ )$.

b) Neka su $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ takve da je $d(c_1, c_2) = 2$. Odrediti reči koje pripadaju skupu $(\ \overline{K}(c_1, 1) \cap \overline{K}(c_2, 1)\ )$.

3. Definicija rekursivne funkcije.

4. Polinom trećeg stepena $P_3(x)$ tabeliran je na sledeći način:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$P_3(x)$	-100	-78	-50	-10	50	130	242	390

Ako se zna da je jedan podatak pogrešan, ispraviti ga i odrediti polinom $P_3(x)$. Izračunati $P_3'(0)$ direktno i pomoću odgovarajuće operatorske jednakosti.

5. Data je diferencijalna jednačina $y' = 2 - \dfrac{y}{x}$, sa početnim uslovom $y(1) = 3$. Picardovim metodom aproksimirati $y(3)$ sa trećom sukcesivnom aproksimacijom $y_3(3)$.

6. Opisati Rombergov metod numeričke integracije.

7. Polazeći od funkcije generatrise ČEBIŠLJEVljevih polinoma $T_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ dokazati da je $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

8. Izračunati:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} L_n(ax)\, dx \qquad (a > 0),$$

gde je $x \mapsto L_n(x)$ LAGUERRREov polinom n-tog stepena.

NAPOMENA:

- **Ispit traje 4 sata.**
- **Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu radjeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

5.5.2001.

MATEMATIKA 4

1. Ispitati da li su rekursivne sledeće aritmetičke funkcije:

$$f_1(x,y)=x+y,\qquad f_2(x,y)=x\cdot y,\qquad f_3(x,y)=x^y.$$

2. Ispitati da li je polinom x^4+x^2+1 svodljiv nad poljem $GF(4)$. Odrediti nule ovog polinoma u istom polju.

3. Skolemizacija.

4. Funkcija $x\mapsto f(x)$ tabelirana je, sa korakom $h>0$, u ekvidistatnim tačkama x_0, x_1, x_2, x_3, x_4. Dokazati aproksimacije:

a) $f'(x_0)\approx \dfrac{1}{12h}\Big(-25f_0+48f_1-36f_2+16f_3-3f_4\Big)$,

b) $f'(x_1)\approx \dfrac{1}{12h}\Big(-3f_0-10f_1+18f_2-6f_3+f_4\Big)$,

c) $f'(x_2)\approx \dfrac{1}{12h}\Big(f_0-8f_1+8f_3-f_4\Big)$.

5. Jednačina $e^z+|z|=0$ ima koren u blizini tačke $1+3i$. Naći koren jednačine sa tačnošću $\varepsilon=0.005$.

6. Opisati Rombergov metod numeričke integracije.

7. Rekuretne relacije za Legendreove polinome.

8. Izračunati:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^nH_n(x)\,dx,$$

gde je H_n Hermiteov polinom.

NAPOMENA:
- **Ispit traje 4 sata.**
- **Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu radjeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET — BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

11.7.2001.

MATEMATIKA 4

1. Neka je data formalna teorija $\mathcal{T} = (\mathrm{A}, \mathrm{Form}, \mathrm{Ax}, \mathrm{R})$ sa elementima:

$$\mathrm{A} = \{a, b\}, \quad \mathrm{Form} = A^*, \quad \mathrm{Ax} = \{a, b\}, \quad \mathrm{R} = \{\alpha, \beta\};$$

gde su data pravila izvođenja:

$$\alpha : \frac{xa}{xab} \quad \text{i} \quad \beta : \frac{xb}{xba}.$$

Opisati sve teoreme formalne teorije $\mathcal{T}$.

2. Konstruisati polje $GF(4)$ sa elementima $0, 1, \alpha, \beta$. Ispitati da li su polinomi $x^2+x+\alpha$ i $x^2+x+\beta$ ireducibilni nad poljem $GF(4)$.

3. TURINGova mašina.

4. Metodom polovljenja intervala naći jedan koren jednačine:

$$\operatorname{tg} x = \frac{2x}{2-x^2},$$

na intervalu $(0, \pi)$ sa tačnošću $\varepsilon = 0.005$.

5. Dokazati da je trapezno pravilo sa korakom $h = \dfrac{2\pi}{n+1}$ tačno za sve trigonometrijske polinome:

$$P_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} \qquad (c_k \in C),$$

kad se primenjuje na intervalu $[0, 2\pi]$.

6. RUNGE-KUTTA metod drugog reda.

7. Ortogonalnost LAGENDREovih polinoma. Formulacija i dokaz.

8. Izračunati $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} \big(H_n(x)\big)^2 dx$, gde je $x \mapsto H_n(x)$ Hermiteov polinom.

NAPOMENA:

- **Ispit traje 4 sata.**
- **Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu radjeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

12.9.2001.

MATEMATIKA 4

1. Konstrukcijom pogodnog svedočanstva istinitosti potvrdnog odgovora dokazati da sledeći problemi pripadaju klasi NP problema:

a) Problem trgovačkog putnika.

b) Problem utvrđivanja singularnosti kvadratne matrice.

2. U multiplikativnoj grupi polja $GF(11)$ odrediti red svakog elementa i odrediti generatore grupe.

3. Formalne teorije.

4. Metodom najmanjih kvadrata odrediti parametre a, b i c u aproksimacionoj funkciji $\Phi(x) = ax^2 + bx + c$ za sledeći skup podataka:

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	-2	0	2	-1

Odrediti vrednost srednje kvadratne greške $\sigma = \sqrt{\sum_{i=0}^{4} |f(x_i) - \Phi(x_i)|^2}$.

5. Neka je data diferencijalna jednačina:

$$y' + \operatorname{tg} y = \frac{x}{\cos y},$$

sa početnim uslovom $y(0) = \pi/4$. Koristeći se metodom RUNGGE-KUTTA četvrtog reda aproksimirati vrednsoti $y(0.1)$ i $y(0.2)$ sa y_1 i y_2.

6. Modifikacije NEWTON-RAPHSONovog metoda.

7. Rekuretne relacije i diferencijana jednačina HERMITEovih polinoma.

8. Izraziti sferne BESSELove funkcije $J_{1/2}(x)$ i $J_{-1/2}$ u konačnom obliku pomoću elementarnih funkcija. Na osnovu toga funkcije $J_{3/2}(x)$ i $J_{-3/2}$ izraziti u konačnom obliku preko elementatrnih funkcija.

NAPOMENA:
- **Ispit traje 4 sata.**
- **Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

10.10.2001.

MATEMATIKA 4

1. U zavisnosti od prirodnog broja n, uzimajući operacije sabiranja i množenja za elementarne korake, odrediti kompleksnost računanja vrednosti realne funkcije:

$$F(x,y) = \sum_{\substack{i+j\le n \\ (0\le i,j\le n)}} a_{ij} x^i y^j$$

u datoj tački $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

2. Dokazati da u proizvoljnoj mreži važi $(x_1 \le y_1)$ & $(x_2 \le y_2) \Longrightarrow (x_1 \vee x_2) \le (y_1 \vee y_2)$. Ispitati da li je preslikavanje $f_a(x) = a \vee x$ monotono. Odrediti sliku intervala $[\, a \wedge b, a \,]$.

3. Linearni kodovi: pregled definicija i teorema.

4. Za analitičku funkciju f odrediti A, B, C u kvadraturnoj formuli:

$$(*) \qquad \int_{-1}^{1} f(z)\, dz = Af(0) + B\big(f(-1) + f(1)\big) + C\big(f(-i) + f(i)\big) + R(f)$$

tako da ona ima najveći stepen algebarske tačnosti. Primenom formule $(*)$ približno izračunati integral:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+2)(e^x+1)}.$$

5. Newton-Raphsonovim metodom rešiti sistem jednačina:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x,y) = x - y^2 - 1 = 0, \\ g(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4y - 2 = 0, \end{array} \right\}$$

na pet tačnih decimala znajući da postoji tačno jedno rešenje u prvom kvadrantu.

6. Aitkenov δ^2-proces (pasivni i aktivni).

7. Izračunati:

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^k H_n(x)\, dx \qquad (k=0,1,\dots,n-1),$$

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x H_n'(x) H_n(x)\, dx,$$

gde je H_n HERMITE-ov polinom.

8. Dokazati ortogonalnost LAGUERREovih polinoma.

NAPOMENA:

- **Ispit traje 4 sata.**
- **Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET — BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

8.12.2001.

MATEMATIKA 4

1. Koristeći se principom rezolucije dokazati da je sledeća formula valjana:

$$(\forall x)(\forall y)\big(A(x,y) \vee A(y,x)\big) \implies (\forall x)(\forall y)(\exists z)\big(A(x,z) \wedge A(y,z)\big).$$

2. Dokazati savršenost sledećeg linearanog koda u $\mathbb{Z}_3$:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{matrix}$$

(kodne reči su određene kolonama). Odrediti generatorsku matricu koda.

3. Definicija klasa problema P i NP. Navesti po jedan primer problema koji pripadaju ovim klasama sa obrazloženjem.

4. Dokazati sledeće veze između operatora prednje razlike Δ, operatora centralne razlike δ i operatora diferenciranja D:

$$\Delta = \frac{\delta^2}{2} + \delta\sqrt{1+\frac{\delta^2}{4}} \quad \text{i} \quad D = \frac{2}{h}\log\left(\frac{\delta}{2} + \sqrt{1+\frac{\delta^2}{4}}\right) \qquad (h>0).$$

5. Date su dve funkcije $y=f(x)=2\cos x$, $y=g(x)=\log x - a : R^+ \longrightarrow R$ $(a \in R)$. Za koju vrednost konstante a postoji dodir grafika funkcija f i g ako se zna da je apscisa tačke dodira bliska π. Odrediti apscisu tačke dodira sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-4}$.

6. Formulisati i izvesti Runge-Kutta metod četvrtog reda.

7. Izvesti analogon Rodriguesove formule za Laguerreove polinome.

8. Ako je P_n Legendreov polinom odrediti $P_n(1)$ i $P_n(0)$, a zatim izračunati:

$$\int_0^1 P_{2n+1}(x)\,dx.$$

NAPOMENA:
- **Ispit traje 4 sata.**
- **Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

13.2.2002.

MATEMATIKA 4

1. a) Neka je data aritmetička funkcija:

$$f_1(x,y) = x \dot{-} y = \begin{cases} x-y & : \quad x \geq y, \\ 0 & : \quad x < y. \end{cases}$$

Dokazati da za prirodne brojeve x, y i z važi jednakost: $x \dot{-} (y+z) = (x \dot{-} y) \dot{-} z$.

b) Dokazati rekursivnost sledećih aritmetičkih funkcija:

(i) $f_1(x,y) = x \dot{-} y$,

(ii) $f_2(x,y) = |x-y|$,

(iii) $f_3(x,y) = \min\{x,y\}$,

(iv) $f_4(x,y) = \max\{x,y\}$.

2. a) Odrediti kompoziciju $\rho\sigma$ za date supstitucije:

$$\rho = \{x \to y, y \to f(z), z \to a, u \to w\} \quad \text{i} \quad \sigma = \{x \to a, y \to u, w \to u\}.$$

b) Da li postoji unifikator skupa $S = \big\{P\big(x, f(y), u, h(f(u), f(u))\big)\rho\sigma, P\big(y, f(x), a, h(x,x)\big)\big\}$?

3. Dokazati da konačno polje sadrži p^k elemenata, gde je p prost broj a k prirodan broj.

4. a) Dokazati da se primenom trapeznog pravila, sa korakom $h = 2\pi/(n+1)$, na trigonometrijske polinome:

$$P_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} \qquad (t \in (0, 2\pi)),$$

dobija tačan rezultat za fiksirane koeficijente $c_k \in C$ $(k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n)$.

b) Neka se funkcija $f(t)$ može aproksimirati trigonometrijskim polinomom n-tog stepena $P_n(t)$ tako da za fiksirano $\varepsilon > 0$ važi: $|P_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ za $t \in (0, 2\pi)$. Dokazati da se primenom trapeznog pravila, sa korakom $h = 2\pi/(n+1)$, integral:

$$I = \int_0^{2\pi} f(t)\, dt$$

izračunava sa greškom manjom od 2ε.

5. Neka je data diferencijalna jednačina:

$$y' + \operatorname{tg} y = \frac{x}{\cos y},$$

Metodom Runge-Kutta drugog reda naći približno rešenje diferencijalne jednačine na intervalu $[0, 0.5]$, pri početnom uslovu $y(0) = \pi/4$, uzimajući korak $h = 0.1$.

6. Newton-Raphsonov metod za rešavanje jednačina $f(x) = 0$.

7. Izračunati $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x \cdot L_n'(x) L_m'(x)\, dx$, gde je L_n Laguerreov polinom.

8. Polazeći od funkcije generatrise Čebiševljevih polinoma $T_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$, izvesti izraz za $T_n(x)$.

NAPOMENA:
- **Ispit traje 4 sata.**
- **Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET — BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

6.4.2002.

MATEMATIKA 4

1. Neka je data trodijagonalna determinanta:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & c_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & c_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & c_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & c_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{vmatrix},$$

pri čemu $a_i, b_j, c_k \neq 0$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j < n, 1 < k \leq n)$. Odrediti kompleksnost algoritma za računanje trodijagonalne determinante.

a) Svođenjem determinante na trougaoni oblik.

b) Korišćenjem formule: $D_n = a_n \cdot D_{n-1} - c_n b_{n-1} \cdot D_{n-2} \quad (D_1 = a_1,\ D_2 = a_1 a_2 - b_1 c_2)$.

2. Ispitati da li je uređen par $(N, |)$, gde je N skup prirodnih brojeva, a $|$ relacija deljivosti mreža. Ako je $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ nacrtati HASSEov dijagram strukture $(D, |)$.

3. Definicije HEBRANDovog domena i osnovnog primera sastavka. Formulacija HEBRANDove teoreme.

4. Odrediti realne parametre A_1, A_2, A_3, A_4 i x_1, x_2 tako da kvadraturna formula:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(-1) + A_4 f(1)$$

bude tačna za polinome što je moguće višeg stepena.

5. Jednačina $e^z + |z| = 0$ ima koren u blizini tačke $1 + 3i$. Naći koren jednačine sa tačnošću $\varepsilon = 0.005$.

6. LAGRANGEov i NEWTONov interpolacioni polinom. Opšti slučaj.

7. Za LAGUERREove polinome dokazti rekuretnu relaciju:

$$nL_{n-1}(x) + L_n'(x) - nL_{n-1}'(x) = 0,$$

a zatim koristeći rekuretnu relaciju izračunati integral

$$\int_x^{+\infty} e^{-y} L_n(y)\, dy.$$

8. Polazeći od funkcije generatrise izvesti izraz za LEGENDREov polinom.

NAPOMENA:

- **Ispit traje 4 sata.**
- **Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – BEOGRAD
Katedra za primenjenu matematiku

27.4.2002.

MATEMATIKA 4

1. Principom rezolucije dokazati valjanost sledeće formule:

$$(\exists x)(\forall y)P(x,y) \implies (\forall y)(\exists x)P(x,y).$$

2. **a)** Dokazati da za svaki element x polja $GF(p)$ polinom $x^p - x$ je identički jednak 0.

b) Faktorisati polinom $x^p - x$ na nesvodljive faktore u polju $GF(p)$.

3. Opis nedeterminističkog polinomijalnog algoritma. Definicije NP-problema i njihova karakterizacija pomoću svedočanstva istinitosti potvrdnog odgovora.

4. Neka je data funkcija $\varphi(x) = \sqrt{2+x} : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$. Primenom BANACHovog stava pokazati da niz:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

pri početnom uslovu $x_0 = 0$, konvergira ka fiksnoj tački α funkcije φ. Naći vrednost α sa tačnošću od $\varepsilon = 10^{-3}$.

5. Neka je data funkcija $F(t) = \displaystyle\int_0^t \Big(\frac{4x+1}{2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Big)\,dx \ \big(t \in [0,1]\big)$. Predložiti metod za precizno izračunavanje vrednosti:

a) $I_1 = F(0.9)$,

b) $I_2 = F(1.0)$.

6. **a)** Važniji operatori u numeričkoj analizi i uzajamna veza među njima. **b)** Ekonomizacija stepenih redova.

7. Ispitati da li je tačna jednakost:

$$\int_{-1}^{1} (1+x)^m P_n(x)\, dx = \frac{2^{m+1}(m!)^2}{(m-n)!(m+n+1)!}, \quad (n \le m)$$

gde je P_n LEGENDREov polinom.

8. Rekuretne relacije i diferencijalna jednačina za HERMITEove polinome.

NAPOMENA:

- **Ispit traje 4 sata.**
- **Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET – BEOGRAD

Katedra za primenjenu matematiku

29.5.2001.

MATEMATIKA 4

- Specijalna grupa (2 kolokvijum) -

1. Neka je data trodijagonalna determinanta:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & c_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & c_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & c_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & c_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{vmatrix},$$

pri čemu $a_i, b_j, c_k \neq 0$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j < n, 1 < k \leq n)$. Odrediti kompleksnost algoritma za računanje trodijagonalne determinante ukoliko se vrši:

a) svođenje determinante na trougaoni oblik,

b) razvoj determinante po nekoj vrsti ili koloni.

2. Metodom rezolucije dokazati valjanost formule:

$$\Big((\forall x)(\forall y)(A(x,y) \Longrightarrow A(y,x)) \ \wedge\ (\forall x)(\forall y)(\forall z)(A(x,y) \wedge A(y,z) \Longrightarrow A(x,z)) \\ \wedge\, (\forall x)(\exists y)A(x,y)\Big) \ \Longrightarrow\ (\forall x)A(x,x)$$

3. Neka je dato polje Galoisa $GF(m)$. Odrediti dva međusobno različita polinoma nad posmatranim poljem koji imaju iste vrednosti za svaku vrednost nezavisne promenljive. Neka su $P_k(x)$ i $Q_n(x)$ dva proizvoljna polinoma nad poljem $GF(m)$ stepena k i n respektivno, pri čemu je ispunjeno: $m > \max\{k,n\}$. Dokazati da su polinomi $P_k(x)$ i $Q_n(x)$ sa jednakim koeficijentima ako i samo ako imaju iste vrednosti za svaki element $x \in GF(m)$.

4. Linearni kodovi. Pregled definicija i rezultata.

5. Dat je potpuni težinski graf G. Opisati jedan algoritam za određivanje minimalnog razapinjućeg stabla i algoritam granjanja i ograničavanja za određivanje najkraćeg Hamiltonovog puta u grafu G.

NAPOMENA:
- **Kolokvijum traje 2 sata i 30 minuta.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**

MATEMATIKA 4

- Specijalna grupa (2 kolokvijum) -

1. Neka su dati skupovi polinoma:

$$\mathcal{P}_m = \Big\{ P(x,y,z) = \sum_{0 \le p+q+r \le m} a_{p,q,r} x^p y^q z^r \mid a_{p,q,r} \in R \backslash \{0\} \Big\} \qquad (m \in N).$$

a) Za $g \in \mathcal{P}_m$, u zavisnosti od prirodnog broja m, izračunati kompleksnost računanja $g(x,y,z)$ u tački $(x_0,y_0,z_0) \in R^3 \backslash \{0\}$.

b) Neka $g \in \mathcal{P}_m$ i neka je formirana vektorska funkcija $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ za $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{P}_m$. U zavisnosti od prirodnog broja m, odrediti kompleksnost računanja vrednosti diferencijalnih operacija prvog reda:

(i) $\quad \operatorname{grad} g(x,y,z) = \dfrac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial g}{\partial z}\vec{k},$

(ii) $\quad \operatorname{rot} \vec{f}(x,y,z) = \left(\dfrac{\partial f_3}{\partial y} - \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial z} - \dfrac{\partial f_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial x} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \right) \vec{k},$

(iii) $\quad \operatorname{div} \vec{f}(x,y,z) = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y} + \dfrac{\partial f_3}{\partial z},$

u tački $(x_0,y_0,z_0) \in R^3 \backslash \{0\}$.

2. Koristeći se principom rezolucije dokazati da je sledeća formula valjana:

$$(\forall x)(\forall y)\big(A(x,y) \vee A(y,x)\big) \Longrightarrow (\forall x)(\forall y)(\exists z)\big(A(x,z) \wedge A(y,z)\big).$$

3. a) Dokazati da je karakteristika konačnog polja prost broj.

b) Dokazati da konačno polje sadrži p^k elemenata, gde je p prost broj, a k prirodan broj.

4. a) Teorema o egzistenciji EULERovog puta u grafu. Formulacija i dokaz.

b) Neka graf G poseduje zatvoren EULERov put. Navesti uslove pod kojima komplement $\overline{G}$ grafa G takođe poseduje zatvoren EULERov put.

5. a) Dati su zadaci linearnog programiranja:

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
&\max\big(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n\big)\\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,\\
&\vdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m;\\
&x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0\,,\ \ldots\,,\ x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
&\max\big(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n\big)\\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2,\\
&\vdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m;\\
&x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0\,,\ \ldots\,,\ x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

Objasniti postupak svođenja zadatka oblika (1) na zadatak oblika (2) i zadatka oblika (2) na zadatak oblika (1).

b) Odrediti najmanju i najveću vrednost funkcija $f(x,y) = 2x + 4y + 1$ i $g(x,y) = x - y$ i odgovarajuće ekstremalne tačke uz ograničenja:

$$
\begin{aligned}
&x + 2y - 13 \leq 0,\\
&x - 2y - 2 \leq 0,\\
&3x - y + 3 \geq 0,\\
&4x + y - 17 \leq 0,\\
&x \geq 0,\ y \geq 0.
\end{aligned}
$$

NAPOMENA:
- **Kolokvijum traje 2 sata i 30 minuta.**
- **Bira se četiri od pet zadataka, s tim što je zadatak 3. obavezan.**
- **U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.**