



MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Odrediti kompleksnost algoritma za izračunavanje vrednosti determinante reda n
 - a) ako se primenjuje razvoj determinante po nekoj vrsti ili koloni,
 - b) ako se determinanta transformiše na trougaoni oblik.
2. Odrediti broj baza u F^n ($F = GF(q)$). Koliko ima linearnih (n, m) -kodova nad poljem F .
3. Definicija i primer formalne teorije.
4. Izračunati $\int_0^{\infty} e^{-x} x^2 L_n^2(x) dx$, gde je L_n LAGUERREOV polinom.
5. Polazeći od funkcije generatriše izvesti izraz za ČEBIŠEVljeV polinom.

NAPOMENA:

- Ispit traje 2.5 sata.
- Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.
- U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.



MATEMATIKA 4

- numerička analiza -

1. Metodom polovljenja intervala, sa tačnošću od $\varepsilon = 10^{-3}$, naći maksimum funkcije:

$$y = f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1},$$

ukoliko se zna da postoji tačno jedan maksimum funkcije u intervalu $(2, \infty)$.

2. EULERovom metodom poligonalnih linija rešiti diferencijalnu jednačinu:

$$y'(x) + \frac{2x + 1}{x(x^2 + x + 1)}y(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + x + 1)x}}$$

na intervalu $[1, 2]$ ako je $y(1) = 1$ i $h = 0.5$.

3. Izvesti trotačkastu GAUSS-LEGENDREovu formulu.

NAPOMENA:

- Ispit traje 1.5 sat.
- Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.
- U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.



MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Opisati kodiranje formula predikatskog računa. Ilustrovati kodiranje na primeru sledeće formule:

$$(\forall x_1)(\forall x_2) R_1^2(x_1, x_2).$$

2. Nad $GF(2)$ odrediti sve ireducibilne polinome stepena 2 i 3.

3. Opisati sledeće heuristike za problem trgovačkog putnika i komentarisati njihov kvalitet:

- a) heuristika najbližeg suseda,
- b) 3-optimalna heuristika.

4. Dokazati rekurentnu relaciju:

$$xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x),$$

a zatim izračunati integral $\int_{-1}^1 xP_n'(x)P_n(x) dx$, gde je P_n LEGENDREov polinom.

5. Dokazati ortogonalnost LAGUERREovih polinoma.

NAPOMENA:

- Ispit traje 2.5 sata.
- Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.
- U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.



MATEMATIKA 4

- numerička analiza -

1. Metodom prostih iteracija naći koren jednačine:

$$y^9 - 3y^2 + 1 = 0,$$

u intervalu $[1, 2]$, sa šest tačnih decimala.

2. Odrediti A , B i C tako da kvadratura formula:

$$\int_0^{2h} x^2 f(x) dx = Af(x_0) + B\Delta f(x_0) + C\Delta^2 f(x_0) + R(f)$$

bude tačna za polinome što većeg stepena.

3. RUNGE-KUTTA metod drugog reda.

NAPOMENA:

- Ispit traje 1.5 sat.
- Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.
- U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu radeni.



MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Principom rezolucije dokazati valjanost formula:

a) $(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \implies (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$,

b) $(\forall x)C(x) \vee (\forall x)D(x) \implies (\forall x)(C(x) \vee D(x))$.

2. Neka je (X, \vee, \wedge) mreža. Dokazati da je preslikavanje $f_a(x) = a \vee x$ monotono. Odrediti sliku intervala $[a \wedge b, a]$, $[a \wedge b, b]$, $[a, a \vee b]$ i $[b, a \vee b]$ pod dejstvom preslikavanja f_a .

3. Definicija rekurzivne funkcije. CHURCHova teza i njeno značenje.

4. 1^0 . Ispitati da li je za BESSELOvu funkciju prve vrste tačna formula:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^\nu}{J_\nu(x)} \right) = x^\nu \frac{J_{\nu+1}(x)}{J_\nu^2(x)}.$$

2^0 . Dokazati da je tačna asimptotska relacija:

$$J_\nu(x) \sim \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \quad (x \rightarrow 0) \quad (\nu \neq -1, -2, \dots).$$

3^0 . Izračunati integral:

$$\int_0^t x^\nu \frac{J_{\nu+1}(x)}{J_\nu^2(x)} dx \quad (\nu \neq -1, -2, \dots).$$

5. Izvesti eksplicitnu formulu za HERMITEOVE polinome koristeći diferencijalnu jednačinu.

NAPOMENA:

- Ispit traje 2.5 sata.
- Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.
- U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.



MATEMATIKA 4

- numerička analiza -

1. Primenom prvog NEWTONovog interpolacionog polinoma izračunati:

$$\text{a) } S_n = \sum_{k=1}^{3n} k^2,$$

$$\text{b) } \sigma_n = \sum_{k=1}^{3n} (-1)^k k^2.$$

2. Diskretnom srednje kvadratnom aproksimacijom (METOD NAJMANJIH KVADRATA) odrediti parametre a , b , c u aproksimacionoj funkciji $\Phi(x) = ax^2 + bx + c$ za sledeći skup podataka:

$$\begin{array}{c|ccccc} x_i & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline f(x_i) & 1 & -1 & -1 & 1 & 5 \end{array}.$$

Odrediti vrednost srednje kvadratne greške $\sigma = \sqrt{\sum_{i=0}^4 |f(x_i) - \Phi(x_i)|^2}$.

3. Izvesti prvi i drugi NEWTONov interpolacioni polinom.

NAPOMENA:

- Ispit traje 1.5 sat.
- Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.
- U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.



MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Polazeći od činjenice da su aritmetičke funkcije: $f_1(x, y) = x + y$, $f_2(x, y) = x \cdot y$, $f_3(x, y) = x^y$ i $f_4(x, y) = x \div y$ rekurzivne, dokazati rekurzivnost sledećih funkcija:

a) $f(x) = \overline{\text{sgn}}(x)$.

b) $g(y) = \lceil \sqrt{5} \cdot y \rceil$.

2. Dokazati savršenost sledećeg linearanog koda u \mathbb{Z}_3 :

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

(kodne reči su određene kolonama). Odrediti generatorsku matricu koda. Dešifrovati reči: 0210 i 1211.

3. Postupak za prevođenje formule kvantifikatorskog računa u preneks normalni oblik.

4. 1^o. Za LAGUERROve polinome L_n dokazati rekurentnu relaciju:

$$nL_{n-1}(x) + L'_n(x) - nL'_{n-1}(x) = 0.$$

2^o. Izračunati integral: $\int_0^{\infty} e^{-x} L'_{n+1}(x) L_n(x) dx$.

5. Izvesti BESSELOvu diferencijalnu jednačinu.

NAPOMENA:

- Ispit traje 2.5 sata.
- Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.
- U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.



MATEMATIKA 4

- numerička analiza -

1. Odrediti realne parametre A , B i c tako da kvadraturna formula:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = Af\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + Bf(-c) + Bf(c) + Af\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

bude tačna za polinome što je moguće višeg stepena.

2. Jednačina $e^{\bar{z}} - |z| = 0$ ima koren u blizini tačke $1.88 + 6.28i$. Naći koren jednačine sa tačnošću $\varepsilon = 0.005$.

3. Izvesti prvi i drugi NEWTONov interpolacioni polinom.

NAPOMENA:

- Ispit traje 1.5 sat.
- Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.
- U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.



MATEMATIKA 4

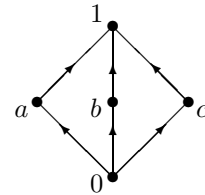
- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Transformisati formule u preneks normalnu formu:

a) $(\forall x)(\forall y)\left((\exists z)(P(x, z) \wedge P(y, z)) \implies (\exists u)Q(x, y, u)\right)$,

b) $(\forall x)(\forall y)\left((\exists z)P(x, y, z) \wedge ((\exists u)Q(x, u) \implies (\exists v)Q(y, v))\right)$.

2. Ispitati distributivnost i modularnost sledeće mreže:



3. TURINGova mašina.

4. 1^o. Dokazati da BESSELOva funkcija prve vrste $J_\nu(\alpha x)$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu:

$$x^2 y'' + x y' + (\alpha^2 x^2 - \nu^2) y = 0.$$

2^o. Dokazati jednakost:

$$\int_0^x J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x) x dx = \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2} \left(\alpha J_\nu(\beta x) J_{\nu+1}(\alpha x) - \beta J_\nu(\alpha x) J_{\nu+1}(\beta x) \right),$$

gde je $\alpha \neq \beta$, $\nu > -1$ i J_ν BESSELOva funkcija prve vrste.

5. Dokazati ortogonalnost LAUGERREovih polinoma.

NAPOMENA:

- Ispit traje 2.5 sata.
- Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.
- U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.



MATEMATIKA 4

- numerička analiza -

1. Neka je data funkcija: $F(t) = t^2 + \frac{1}{2}t - 1 + \sqrt{1 - t^2} : [0, 1] \rightarrow R$. Ukoliko se zna da funkcija F ima tačno jedan maksimum u tački $c \in (0, 1)$, izračunati c sa tačnošću $\varepsilon = 0.005$.
2. Za diferencijalnu jednačinu $y' = x^2y^2 - 1$, pri početnom uslovu $y(0) = 1$, odrediti prvih pet članova razvoja rešenja u MACLAURINOV red.
3. Izvesti prvi i drugi NEWTONOV interpolacioni polinom.

NAPOMENA:

- Ispit traje 1.5 sat.
- Dozvoljena je upotreba samo neprogramabilnih kalkulatora.
- U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.



KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. U zavisnosti od prirodnog broja n , uzimajući operacije sabiranja i množenja za elementarne korake, proceniti kompleksnost izračunavanja vrednosti funkcije:

$$F(x, y) = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m a_{k,m-k} x^k y^{m-k}$$

u datoj tački $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Koeficijenti funkcije su poznati realni brojevi.

2. Ispitati svodljivost polinoma:

$$P_k(x) = x^2 + kx + 1$$

nad poljem $\text{GF}(3)$ u zavisnosti od parametra k .

3. Definisati i obrazložiti pravila izvođenja:

- modus ponens,
- rezolucija.

4. a) Dokazati rekurentnu relaciju:

$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x).$$

b) Izračunati integral:

$$\int_{-1}^1 xP'_n(x)P_n(x) dx.$$

P_n je LEGENDREov polinom.

5. Koristeći HERMITEovu diferencijalnu jednačinu izvesti eksplicitni oblik za HERMITEove polinome.

NAPOMENA:

- Kolokvijum traje 2.5 sata.
- Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.
- U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.



MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Odrediti kompoziciju $\alpha\beta$ supstitucija:

a) $\alpha = \{x \rightarrow f(y), y \rightarrow z\}, \beta = \{x \rightarrow a, y \rightarrow b, z \rightarrow y\};$

b) $\alpha = \{x \rightarrow a, y \rightarrow f(z), z \rightarrow y\}, \beta = \{x \rightarrow b, y \rightarrow z, z \rightarrow g(x)\}.$

2. U aditivnoj grupi $\mathbf{Z}_6 = (Z_6, +_6)$ odrediti:

a) Red svakog elementa.

b) Generatore grupe.

c) Ciklične podgrupe.

3. Definicija rekurzivne funkcije. CHURCHova teza i njeno značenje.

4. 1^o. Dokazati rekurentnu relaciju za LAGUERREove polinome:

$$L_{n+1}(x) + (x - 2n - 1)L_n(x) + n^2L_{n-1}(x) = 0.$$

2^o. Izračunati integral: $\int_0^{\infty} e^{-x} x^2 L_n^2(x) dx.$

5. Dokazati RODRIGUESovu formulu za LEGENDREove polinome.

NAPOMENA:

- Ispit traje 2.5 sata.
- Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.
- U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.



MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Polazeći od činjenice da su aritmetičke funkcije $f_1(x, y) = x + y$ i $f_2(x, y) = x \cdot y$ rekurzivne, dokazati rekurzivnost funkcija: $f(x) = x!$, $g(x) = x \div 1$ i $h(x, y) = x \div y$.
2. Navesti definicije S i A mreže. Dokazati da je svaka S -mreža ujedno i A -mreža.
3. Definisati pojmove: atom, literal, sastavak, rezolventa.
4. Izraziti sferne Besselove funkcije $J_{1/2}(x)$ i $J_{-1/2}(x)$ u konačnom obliku pomoću elementarnih funkcija.
5. Polazeći od funkcije generatriše izvesti izraz za ČEBIŠEVljeve polinom.

NAPOMENA:

- Ispit traje 2.5 sata.
- Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.
- U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.



MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Principom rezolucije dokazati valjanost sledećih formula:

- a) $(\forall y)(\forall x)A(x, y) \implies (\exists x)(\forall y)A(x, y),$
- b) $(\exists x)(\forall y)A(x, y) \implies (\forall y)(\exists x)A(x, y),$
- c) $(\forall y)(\exists x)A(x, y) \implies (\exists x)(\exists y)A(x, y).$

2. Nad $GF(3)$ odrediti sve ireducibilne polinome stepena 1 i 2.

3. Definicija i primer formalne teorije.

4. Izračunati $\int_0^{\infty} e^{-x} x \cdot L'_n(x) L'_m(x) dx$, gde je L_n LAGUERREov polinom.

5. Izvesti izraz za LEGENDREovu diferencijalnu jednačinu.

NAPOMENA:

- Ispit traje 2.5 sata.
- Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.
- U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.



MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Principom rezolucije dokazati valjanost sledećih formula:

- a) $(\forall x)(\forall y)A(x, y) \implies (\exists y)(\forall x)A(x, y)$,
- b) $(\exists y)(\forall x)A(x, y) \implies (\forall x)(\exists y)A(x, y)$,
- c) $(\forall x)(\exists y)A(x, y) \implies (\exists y)(\exists x)A(x, y)$.

2. Dokazati da je svaka distributivna mreža ujedno i modularna. Da li važi i obrnuto?

3. Pregled osnovnih pojmova iz teorije linearnih kodova.

4. Ako je P_n LEGENDREov polinom, odrediti $P_n(1)$ i $P_n(0)$, a zatim izračunati $\int_0^1 P_{2n+1}(x) dx$.

5. Diferencijalna jednačina LAGUERREovih polinoma.

NAPOMENA:

- Ispit traje 2.5 sata.
- Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.
- U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.



MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Azbuka TURINGove mašine sadrži simbole 0, 1 i prazno slovo b . Prirodni brojevi se predstavljaju svojim binarnim zapisom. Konstruisati program za ovu mašinu koji utvrđuje da li je zadan prirodni broj deljiv sa 8.

2. Dokazati da je sledeća formula

$$(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x) \implies (\forall x)(A(x) \wedge B(x))$$

teorema predikatskog računa.

3. Dokazati da konačno polje ima p^k elemenata gde je p prost a k prirodan broj.

4. Izračunati

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} (H_n(x))^2 dx,$$

gde je $H_n(x)$ HERMITEOV polinom.

5. Dokazati da za ČEBIŠEVljeve polinome važi formula

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

NAPOMENA:

- Ispit traje 2.5 sata.
- Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.
- U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.



KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Principom rezolucije dokazati valjanost formula:

a) $(\exists x)A(x) \wedge (\forall x)B(x) \implies (\exists x)(A(x) \wedge B(x)),$

b) $(\forall x)(C(x) \vee D(x)) \implies (\forall x)C(x) \vee (\exists x)D(x).$

2. Ispitati svodljivost polinoma:

$$P_k(x) = x^2 + kx + 1$$

nad poljem $GF(3)$ u zavisnosti od parametra k .

3. Opisati 3-optimalnu heuristiku za problem trgovačkog putnika.

4. Izračunati integral

$$\int_{-1}^1 L_n(x) P_n(x) dx,$$

gde je $P_n(x)$ LEGENDREov polinom i $L_n(x)$ LAGUERREov polinom.

5. Koristeći HERMITEovu diferencijalnu jednačinu izvesti eksplicitni oblik za HERMITEove polinome.

NAPOMENA:

- Kolokvijum traje 2.5 sata.
- Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.
- U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.



MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Odrediti kompleksnost problema da li u zadanom grafu sa n čvorova postoji potpun podgraf sa k čvorova.

2. Odrediti kompoziciju $\alpha\beta$ supstitucija:

a) $\alpha = \{x \rightarrow f(y), y \rightarrow z\}$, $\beta = \{x \rightarrow a, y \rightarrow b, z \rightarrow y\}$;

b) $\alpha = \{x \rightarrow a, y \rightarrow f(z), z \rightarrow y\}$, $\beta = \{x \rightarrow b, y \rightarrow z, z \rightarrow g(x)\}$.

3. a) Dokazati da je karakteristika konačnog polja prost broj. b) Dokazati da konačno polje ima p^k elemenata, gde je p prost a k prirodan broj.

4. Izračunati:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) P_n(x) dx,$$

gde je $P_n(x)$ LEGENDREov polinom i $L_n(x)$ LAGUERREov polinom.

5. Izvesti formulu za integralni oblik BESSELOvih polinoma i pokazati da je

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z).$$

NAPOMENA:

- Ispit traje 2.5 sata.
- Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.
- U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.



MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. a) Neka je data aritmetička funkcija:

$$f_1(x, y) = x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & : x \geq y, \\ 0 & : x < y. \end{cases}$$

Dokazati da za prirodne brojeve x , y i z važi jednakost: $x \dot{-} (y + z) = (x \dot{-} y) \dot{-} z$.

b) Dokazati rekurzivnost sledećih aritmetičkih funkcija:

(i) $f_1(x, y) = x \dot{-} y$,

(ii) $f_2(x, y) = |x - y|$,

(iii) $f_3(x, y) = \min\{x, y\}$,

(iv) $f_4(x, y) = \max\{x, y\}$.

2. Neka u mreži (X, \vee, \wedge) važi:

(*) $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$.

Dokazati da je tada mreža modularna.

3. Opisati prevođenje formule kvantifikatorskog računa u preneksni normalni oblik. Skolemizacija formule.

4. 1⁰. Dokazati da HERMITEov polinom

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

zadovoljava diferencijalnu jednačinu

(1) $y'' - 2xy' + 2ny = 0$.

2⁰. Koristeći diferencijalnu jednačinu (1) dokazati da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n).$$

5. Dokazati ortogonalnost LAGUERREovih polinoma.

NAPOMENA:

- Ispit traje 2.5 sata.
- Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.
- U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.



MATEMATIKA 4

- diskretna matematika i specijalne funkcije -

1. Koristeći se metodom rezolucije dokazati da je formula

$$(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$$

posledica formula

$$(\exists x)(A(x) \wedge C(x)), \quad (\forall x)(C(x) \implies (B(x) \wedge D(x))).$$

2. a) Dokazati da za svaki element x polja $GF(p)$ polinom $x^p - x$ je identički jednak 0.

b) Faktorirati polinom $x^p - x$ na nesvodljive faktore u polju $GF(p)$.

3. Definicija rekurzivne funkcije i CHURCHova teza.

4. Dokazati da je

$$\int_0^{\pi/2} J_1(x \cos \theta) d\theta = \frac{1 - \cos x}{x},$$

gde je $t \mapsto J_1(t)$ BESSELOva funkcija.

5. Izvesti eksplicitni izraz za HERMITEove polinome koristeći odgovarajuću diferencijalnu jednačinu.

NAPOMENA:

- Ispit traje 2.5 sata.
- Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.
- U tabeli, na koricama vežbanke, precrtati zadatke koji nisu rađeni.