Dr Branko Malešević

ETF - Matematika 2, 2008., 2009.

1. VEKTORSKI PROSTORI

1.1. Polja skalara

Polazni pojam u definisanju pojma vektorskog prostora je pojam polja $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$ kao algebarske strukture sa od ranije poznatom aksiomatikom. Napomenimo da neutralni element za sabiranje označavamo sa 0_F i neutralni element za množenje označavamo sa 1_F. Elemente polja $\mathbf{F}$ nazivamo *skalarima.*

Primer 1.1.1. Primeri polja: $\mathbf{Z}_p$ (p-prost broj), $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$.

1.2. Definicija vektorskog prostora

Definicija 1.2.1 Neka je V neprazan skup čije elemente zovemo *vektorima* i neka je $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$ polje skalara. Algebarska struktura:

$$\mathbf{V} = (V, +, \cdot)$$

naziva se *vektorski prostor* $\mathbf{V}$ *nad poljem* $\mathbf{F}$ ako za binarnu operaciju sabiranja vektora $+ : V^2 \longrightarrow V$ i spoljnu operaciju množenja skalara i vektora $\cdot : F \times V \longrightarrow V$ važe aksiome:

(V_1) $(V, +)$ jeste Abelova grupa,

(V_2) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ za svako $\alpha \in F$ i $x, y \in V$,

(V_3) $(\alpha +_F \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ za svako $\alpha, \beta \in F$ i $x \in V$,

(V_4) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot_F \beta) \cdot x$ za svako $\alpha, \beta \in F$ i $x \in V$,

(V_5) $1_F \cdot x = x$ za svaki $x \in V$.

Drugim rečima, vektorski prostor $\mathbf{V}$ možemo odrediti uređenim parom $(V, \mathbf{F})$ tako da važi:

(i) V neprazan skup (njegove elemente zovemo vektorima).

(ii) $\mathbf{F}$ je polje (njegove elemente zovemo skalarima).

(iii) U skupu V je definisana binarna operacija $+ : V^2 \longrightarrow V$, koju nazivamo sabiranje vektora, takva da važi aksioma (V_1).

(iv) Definisana je spoljna operacija $\cdot : F \times V \longrightarrow V$, koju zovemo množenje vektora skalarom (tj. elementom) polja F za koju važe aksiome $(V_2) - (V_5)$.

Napomena 1.2.1. Uobičajeno je da skalare označavamo malim slovima grčkog alfabeta: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ i da vektore označavamo malim slovima abecede: $a, b, c, \ldots$. Dalje, $\alpha +_F \beta$ označavaćemo sa $\alpha + \beta$, odnosno $\alpha \cdot_F \beta$ označavaćemo sa $\alpha\beta$. U daljem razmatranju nulu polja 0_F i jedinicu polja 1_F označavaćemo sa 0 i 1 respektivno.

Napomena 1.2.2. Neka je $\mathbf{V}$ vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$. Ukoliko je $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, tada vektorski prostor nazivamo *realnim vektorskim prostorom*, dok za $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ nazivamo *kompleksnim vektorskim prostorom.*

1.3. Primeri vektorskih prostora

Primer 1.3.1. Vektorski prostor uređenih n-torki: $\mathbf{F}^n = (F^n, +, \cdot)$ ...

Primer 1.3.2. Vektorski prostor polinoma stepena ne većeg od n: $\mathbf{F}^n[x] = (F^n[x], +, \cdot)$ ...

Primer 1.3.3. Vektorski prostor funkcija: $\mathbf{V} = (F^F, +, \cdot)$ ...

Primer 1.3.4. Opšti funkcijski prostor[1] $\mathbf{W} = (V^X, +, \cdot)$ i specijalni funckijski vektorski prostori neprekidnih funkcija $C[a, b]$, diferencijabilnih funkcija $D[a, b]$ ...

1.4. Osnovne osobine vektorskih prostora

Teorema 1.4.1. Ako je $\mathbf{V} = (V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$, tada za svaki skalar $\lambda \in F$ i svaki vektor $a \in V$ važi:

1°. $\lambda \cdot 0 = 0$,

2°. $0 \cdot a = 0$,

3°. $\lambda \cdot a = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \vee a = 0$.

Dokaz. ....

Teorema 1.4.2. Ako je $\mathbf{V} = (V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$, tada za svaki vektor $a \in V$ važi:

4°. $-a = (-1) \cdot a$.

Dokaz. ....

1.5. Vektorski potprostori

Definicija 1.5.1. Neka je $\mathbf{V} = (V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$. Tada podskup $W \subseteq V$ određuje *vektorski potprostor* $\mathbf{W}$ vektorskog prostora $\mathbf{V}$ ako važi:

1°. $W \neq \emptyset$.

2°. Za skup W restrikcije operacija $+ = +|_W : W^2 \longrightarrow W$ i $\cdot = \cdot|_W : F \times W \longrightarrow W$ određuju vektorski prostor $\mathbf{W} = (W, +, \cdot)$.

Drugim rečima, skup $W \subseteq V$ $(W \neq \emptyset)$, za vektorski prostor $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$, određuje vektorski potprostor $\mathbf{W}$ vektorskog prostora $\mathbf{V}$ ako je $\mathbf{W} = (W, \mathbf{F})$ vektorski prostor. Prema aksiomatici vektorskih prostora proizvoljni vektorski prostor sadrži nula vektor 0. Samim tim svaki vektorski prostor $\mathbf{V}$ za koji postoje i ne-nula vektori $(V \neq \{0\})$ ima bar dva tvz. *trivijalna potprostora* $(\{0\}, +, \cdot)$ i $(V, +, \cdot)$, svi ostali potprostori nazivaju se *pravi potprostori*.

Teorema 1.5.1. Neprazan podskup $W \subseteq V$ određuje vektorski potprostor $\mathbf{W}$ vektorskog prostora $\mathbf{V}$ nad poljem skalara $\mathbf{F}$ akko važi

$$(\forall x, y \in W)(\forall \alpha, \beta \in F) \ \ \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in W.$$

Dokaz. ....

[1] gde je $\mathbf{V}$ dati vektorski prostor i X dati skup

1.6. Linearna zavisnost

Definicija 1.6.1. Neka je $\mathbf{V}$ vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$. Za $v_1, \ldots, v_n \in V$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ vektor

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n$$

predstavlja *linearnu kombinaciju vektora* $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Definicija 1.6.2. Skup svih linearnih kombinacija vektora $v_1, \ldots, v_n$ vektorskog prostora $\mathbf{V}$ nad poljem skalara $\mathbf{F}$ određuje skup

$$L(\{v_1, \ldots, v_n\}) = \{\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F\}$$

koji nazivamo *lineal vektora* $v_1, \ldots, v_n$.

Teorema 1.6.1. Neka je $\mathbf{V}$ vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$ i neka su $v_1, \ldots, v_n \in V$ fiksirani vektori. Tada lineal $L(\{v_1, \ldots, v_n\})$ određuje vektorski potprostor vektorskog prostora $\mathbf{V}$.

Dokaz. ...

Definicija 1.6.3. Neka je $\mathbf{V}$ vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$. Za vektore $v_1, \ldots, v_n \in V$ kažemo da su *linearno zavisni* ako postoje skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ takvi da je bar jedan različit od nule i pri tom važi:

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = 0.$$

Za vektore $v_1, \ldots, v_n \in V$ kažemo da su *linearno nezavisni* ukoliko nisu linearno zavisni.

Napomena 1.6.1. Važi:

$$v_1, \ldots, v_n \text{ – linearno zavisni} \quad \text{akko} \quad (\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, \alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = 0 \wedge \neg(\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0)$$

i odatle zaključujemo[2]:

$$v_1, \ldots, v_n \text{ – linearno nezavisni} \quad \text{akko} \quad (\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, \alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Teorema 1.6.2. Neka je $\mathbf{V}$ vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$. Vektori $v_1, \ldots, v_n \in V$ su linearno zavisni akko je bar jedan od njih linearna kombinacija preostalih vektora.

Primer 1.6.1. ...

Primer 1.6.2. ...

1.7. Baza i dimenzija

Definicija 1.7.1. Neka je $\mathbf{V}$ vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$. Skup vektora $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq V$ jeste *generatorski skup* za vektorski prostor $\mathbf{V}$ ako važi $L(\{x_1, \ldots, x_n\}) = V$.

[2] linearna zavisnost je ekvivaletna sa formulom oblika $(\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \wedge \neg Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$;
linearna nezavisnost je ekvivaletna sa formulom oblika $(\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, \neg P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \vee Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$,
pri čemu važi tautologija: $\models \big(\neg P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \vee Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\big) \Longleftrightarrow \big(P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \Longrightarrow Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\big)$

Definicija 1.7.2. Neka je $\mathbf{V}$ vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$. Skup vektora $B = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq V$ jeste *bazni skup* (*baza*) za vektorski prostor $\mathbf{V}$ ako važi:

1°. Skup $\{x_1, \ldots, x_n\}$ jeste generatortski, tj. $L(\{x_1, \ldots, x_n\}) = V$.

2°. Skup $\{x_1, \ldots, x_n\}$ jeste linearno nezavisan skup vektora u V.

Primer 1.7.1. ...

Primer 1.7.2. ...

Definicija 1.7.3. Ako vektorski prostor ima bar jednu bazu koja sadrži konačno mnogo elemenata, tada se prostor naziva *konačno-dimenzionalni vektorski prostor*.

Teorema 1.7.1. Ako je $\mathbf{V}$ konačno-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$, tada sve baze imaju isti broj elemenata.

Definicija 1.7.4. Ako vektorski prostor $\mathbf{V}$, takav da $V \neq \{0\}$, nad poljem skalara $\mathbf{F}$ ima bazu sa n elemenata, tada se prirodan broj n naziva *dimenzija konačno-dimenzionalnog vektorskog prostora.* Koristimo oznaku $n = \dim(V)$.

Napomena 1.7.1. U slučaju trivijalnog vektorskog prostora $\mathbf{V}$, kada je $V = \{0\}$, smatramo da je nulte dimenzije, tj. $\dim(V) = 0$.

Primer 1.7.3. ...

Napomena 1.7.2. Ako vektorski prostor nema konačnu bazu, tada za takve vektorske prostore pojam baze takođe može uvesti na odgovarajući način. Takvi prostori se nazivaju *beskonačno-dimenzionalni vektorski prostori.*

Primer 1.7.4. ...

Teorema 1.7.2. Neka je $\mathbf{V}$ konačno-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$ sa baznim skupom $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Svaki vektor $x \in V$ može se na tačno jedan način izraziti kao linearna kombinacija u odnosu na poredak baznih vektora $x_1, \ldots, x_n$.

Dokaz. ...

Napomena 1.7.3. Neka je $\mathbf{V}$ konačno-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$ sa baznim skupom $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Za vektor $x \in V$ predstavljanje $x = \alpha_1 \cdot x_1 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n$, u odnosu na poredak baznih vektora $x_1, \ldots, x_n$, određuje *koordinate* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *vektora* x *u bazi* B.

1.8. Izomorfizmi vektorskih prostora

Definicija 1.8.1. Dva vektorska prostora $\mathbf{V_1} = (V_1, +_1, \cdot_1)$ i $\mathbf{V_2} = (V_2, +_2, \cdot_2)$ nad istim poljem skalara $\mathbf{F}$ su *homomorfni prostori* ako postoji preslikavanje $f : V_1 \longrightarrow V_2$ takvo da važi:

$$(\forall x, y \in V_1)(\forall \alpha, \beta \in F)\ f(\alpha \cdot_1 x +_1 \beta \cdot_1 y) = \alpha \cdot_2 f(x) +_2 \beta \cdot_2 f(y).$$

Preslikavanje f nazivamo *linearni operator ili homomorfizam vektorskog prostora* $\mathbf{V_1}$ *u vektorski prostor* $\mathbf{V_2}$. Posebno, ako je homomorfizam f bijekcija tada ga nazivamo *izomorfizam vektorskog prostora* $\mathbf{V_1}$ *u vektorski prostor* $\mathbf{V_2}$. Same vektorske prostore $\mathbf{V_1}$ i $\mathbf{V_2}$ smatramo *izomorfnim prostorima*, što označavamo $\mathbf{V_1} \cong \mathbf{V_2}$.

Teorema 1.8.2. Svaki n-dimenzionalni vektorski prostor $\mathbf{V}$ nad poljem skalara $\mathbf{F}$ izomorfan je vektorskom prostoru uređenih n-torki $\mathbf{F}^n$.

2. UNITARNI PROSTORI I ANALITIČKA GEOMETRIJA U $\boldsymbol{R}^3$

2.1. Unitarni prostori

Definicija 2.1.1. Vektorski prostor $\mathbf{V}$ nad poljem $\mathbf{F}$ realnih ili kompleksnih skalara ($\mathbf{F} = \mathbf{R}$ ili $\mathbf{F} = \mathbf{C}$) naziva se *unitarni* ili *pred*-HILBERT*ov prostor* ako za *skalarni* ili *unutrašnji proizvod* $(\,.\,,\,.\,) : V^2 \longrightarrow F$ važe aksiome:

(S_1) $\quad (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ za svako $x, y, z \in V$,

(S_2) $\quad (\alpha \cdot x, y) = \alpha(x, y)$ za svako $\alpha \in F$ i $x, y \in V$,

(S_3) $\quad (x, y) = \overline{(y, x)}$ za svako $x, y \in V$,

(S_4) $\quad (x, x) \geq 0$ za svako $x \in V$,

(S_5) $\quad (x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ za svako $x \in V$.

Na osnovu (S_3), primetimo da i u slučaju kompleksnog unitarnog prostora vrednosti (x, x), za $x \in V$, jesu realni brojevi i dotano na osnovu (S_4) jesu nenegativni realni brojevi.

Definicija 2.1.2. *Norma* (*intezitet*) *vektora* x iz unitarnog prostora $\mathbf{V}$ je nenegativan broj $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Za tako određenu normu kažemo da je *norma indukovana skalarnim proizvodom.*

Primer 2.1.1. Uvođenje skalarnog proizvoda i norme u vektorski prostor $\boldsymbol{R^n}$ ...

Primer 2.1.2. Uvođenje skalarnog proizvoda i norme u vektorski prostor $\boldsymbol{C^n}$ ...

Primer 2.1.3. Uvođenje skalarnog proizvoda i norme u vektorski prostor $\mathrm{C}[a, b]$ ...

2.2. Osnovne osobine norme

Teorema 2.2.1. (CAUCHY, БУНЯКОВСКИЙ, SCHWARZ) Neka je $\mathbf{V}$ unitaran prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$ i sa skalarnim proizvodom $(\,.\,,\,.\,) : V^2 \longrightarrow F$. Tada za normu indukovanu skalarnim proizvodom važi:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad (x, y \in V)$$

sa jednakošću akko su x i y linearno zavisni vektori.

Teorema 2.2.2. Neka je $\mathbf{V}$ unitaran prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$ i sa skalarnim proizvodom $(\,.\,,\,.\,) : V^2 \longrightarrow F$. Tada za normu indukovanu skalarnim proizvodom važi:

1°. $\|x\| \geq 0 \quad (x \in V)$,

2°. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad (x \in V)$,

3°. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad (\alpha \in F, x \in V)$,

4°. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad$ (*nejednakost*[3] *trougla* za $x, y \in V$).

Dokaz. ...

[3] jednakost važi akko je $y = 0$ ili $x = \alpha y$ za $\alpha \geq 0$

Definicija 2.2.1. Vektorski prostor $\mathbf{V}$ nad poljem skalara $\mathbf{F}$ naziva se *normiran vektorski prostor* ako za *normu* $\| \, . \, \| : V \longrightarrow R$ važe aksiome:

(N_1) $\|x\| \geq 0$ za svako $x \in V$,

(N_2) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ za svako $x \in V$,

(N_3) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ za svako $\alpha \in F, x \in V$,

(N_4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ za svako $x, y \in V$.

Primer 2.2.1. ...

Primer 2.2.2. ...

Definicija 2.2.2. Neka je vektorski prostor $\mathbf{V}$ normiran sa normom $\| \, . \, \|$, tada funkcija:

$$d = d(x, y) = \|x - y\| : V^2 \longrightarrow R$$

se naziva *metrika na* V.

2.3. Geometrija unitarnih prostora

U ovom delu razmatramo slučaj realnog unitarnog prostora $\mathbf{V}$ i geometriju takvih prostora zasnovanu na nejednakosti Cauchy–Буняковский–Schwarz-a:

$$\left| \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \right| \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 \leq \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1 \qquad (x, y \neq 0).$$

Definicija 2.3.1. Neka je $\mathbf{V}$ realni unitarni vektorski prostor, tada *ugao između dva ne-nula vektora x i y* određujemo kao realan broj $\varphi = \angle(x, y) \in [0, \pi]$ takav da važi:

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \qquad (x, y \neq 0).$$

Definicija 2.3.2. Za ne-nula vektore x i y kažemo da su *ortogonalni vektori* u unitarnom prostoru $\mathbf{V}$ ako je $(x, y) = 0$, navedeno označavamo $x \perp y$.

Napomena 2.3.1. Dodatno smatraćemo da je nula vektor ortogonalan na svaki vektor iz unitarnog prostora $\mathbf{V}$.

Definicija 2.3.3. Za dva vektora x i y kažemo da su *paralelni* (*kolinearni*) *vektori* u unitarnom prostoru $\mathbf{V}$ ako su linearno zavisni, navedeno označavamo $x \parallel y$.

Teorema 2.3.2. Neka su x i y međusobno ortogonalni vektori unitarnog prostora $\mathbf{V}$, tada važi:

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2.$$

Dokaz. ...

Teorema 2.3.1. Neka su x i y vektori unitarnog prostora $\mathbf{V}$, tada važi:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Definicija 2.3.4. Skup vektora $\{x_1, \ldots, x_n\}$ unitarnog prostora $\mathbf{V}$ je *ortogonalan skup vektora* ako za svaka dva različita indeksa $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ važi $(x_i, x_j) = 0$. Ukoliko, pored prethodnog, važi i $\|x_i\| = 1$ za svaki indeks $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tada taj skup vektora je *ortonormiran skup vektora*.

Teorema 2.3.3. U unitarnom prostoru svaki ortogonalni skup ne-nula vektora jeste linearno nezavisan.

Dokaz. ...

2.4. Vektori u $\boldsymbol{R}^3$

Za realni vektorski prostor $\mathbf{R}^3$ uređeni par (P,Q) određuje *usmerenu duž* $\overrightarrow{PQ}$ za $P,Q \in R^3$. U ovom delu definišemo pojam vektora u R^3 polazeći od skupa svih usmerenih duži nad kojima razmatramo jednakost usmerenih duži na način koji sleduje. Usmerene duži $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{XY}$ su jednake, u oznaci $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{XY}$, ako su ispunjeni sledeći geometrijski uslovi: (i) prave $\mathfrak{p}(P,Q)$ i $\mathfrak{p}(X,Y)$ su paralelne; (ii) poluprave $\mathfrak{p}[P,Q)$ i $\mathfrak{p}[X,Y)$ su isto usmerene i (iii) duži PQ i XY su podudarne. Relacija jednakosti usmerenih duži jeste jedna relacija ekvivalencije skupa svih usmerenih duži. *Vektor* $\vec{a}$ *u* R^3 definišemo kao klasu ekvivalencije:

$$\vec{a} \stackrel{def}{=} \{\overrightarrow{XY} \mid \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ}\}_{\overrightarrow{PQ}}$$

gde je $\overrightarrow{PQ}$ fiksiran predstavnik klase ekvivalencije. *Nula vektor* $\vec{0}$ je klasa ekvivalencije za koju se prva i druga koordinata usmerene duži podudaraju. Uobičajeno je da oznaku predstavnika klase poistovećujemo sa oznakom klase.

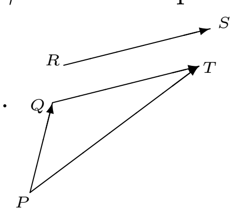
Teorema 4.1.1. Za vektor $\vec{a}$ u R^3 postoji tačno jedna tačka $D \in R^3$ takva da je $\vec{a} = \overrightarrow{OD}$, gde je $O = O(0,0,0)$ (koordinatni početak).

Napomena 4.1.1. Tačka $D = D(\alpha,\beta,\gamma) \in R^3$ određuje *koordinate vektora* $\vec{a}$, što zapisujemo $\vec{a} = (\alpha,\beta,\gamma)$.

Skup vektora u R^3 jeste skup:

$$\mathsf{V} \stackrel{def}{=} \{\vec{a} \mid \vec{a} - \text{vektor u } R^3\},$$

koji predstavlja količnički skup polaznog skupa usmerenih duži po relaciji ekvivalencije jednakosti usmerenih duži. Za vektor $\vec{a} = (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathsf{V}$ *intezitet vektora u* R^3 određen je sa $|\vec{a}| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$. Nad skupom vektora V definišemo dve operacije:



1⁰. *Sabiranje vektora* $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS} \in \mathsf{V}$ određeno je vektorom $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS}$, gde je $\overrightarrow{QT} = \overrightarrow{RS}$.

2⁰. *Množenje skalara* $\alpha \in R$ *i vektora* $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} \in \mathsf{V}$ određeno je sa vektorom $\alpha \cdot \vec{a}$ tako da:

***a*)** Ako je $\alpha \neq 0$ i $\vec{a} \neq \vec{0}$ tada (i) pravac vektora $\alpha \cdot \vec{a}$ je paralelan sa pravcem vektora $\vec{a}$; (ii) smer vektora $\alpha \cdot \vec{a}$ je isti sa smerom vektora $\vec{a}$ ukoliko je $\alpha > 0$, inače je suprotnog smera ukoliko je $\alpha < 0$ i (iii) $|\alpha \cdot \vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$.

***b*)** Ako je $\alpha = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$ tada $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Teorema 2.4.2. Skup vektora V u odnosu na sabiranje vektora $+ : \mathsf{V}^2 \longrightarrow \mathsf{V}$ i množenje realnog skalara i vektora $\cdot : R \times \mathsf{V} \longrightarrow \mathsf{V}$ određuje jedan realan vektorski prostor $\mathbb{V} = (\mathsf{V},+,\cdot)$.

2.5. Skalarni proizvod vektora u $\boldsymbol{R}^3$

Definicija 2.5.1. Neka su dati vektori $\vec{a} = (x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b} = (x_2,y_2,z_2) \in \mathsf{V}$, tada *skalarni proizvod vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *u* R^3, u oznaci $\vec{a} \circ \vec{b}$, jeste realan broj:

$$\vec{a} \circ \vec{b} \stackrel{def}{=} x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Teorema 2.5.1. Realni vektorski prostor $\mathbb{V}$ vektora u $\mathbf{R}^3$ određuje unitaran prostor u odnosu na skalarni proizvod $(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a} \circ \vec{b}$ za $\vec{a},\vec{b} \in \mathsf{V}$. Tada, norma indukovana skalarnim proizvodom je $\|\vec{a}\| = |\vec{a}|$ za $\vec{a} \in \mathsf{V}$.

Na osnovu geometrije unitarnih prostora za dva ne-nula vektora $\vec{a}, \vec{b} \in V$ važi:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi,$$

gde je $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ ugao između dva posmatrana vektora. Odatle sleduje:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \iff \vec{a} = \vec{0} \ \vee \ \vec{b} = \vec{0} \ \vee \ \vec{a} \perp \vec{b} \qquad (\vec{a}, \vec{b} \in V).$$

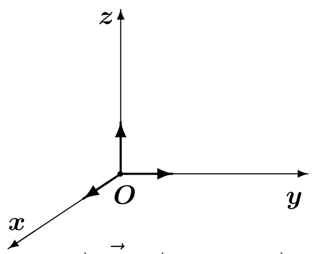
Definicija 2.5.2. Neka je $\mathbb{V}$ unitarni prostor vektora u R^3 i neka je $\vec{a} \in V \backslash \{\vec{0}\}$ fiksiran ne-nula vektor. *Algebarska vrednost ortogonalne projekcije vektora* $\vec{v} \in V$ *na vektor* $\vec{a}$ jeste broj $\mathrm{pr}_{\vec{a}}(\vec{v}) \stackrel{def}{=} |\vec{v}| \cdot \cos\angle(\vec{v}, \vec{a})$. *Ortogonalna projekcija vektora* $\vec{v} \in V$ *na vektor* $\vec{a}$ jeste vektor $\vec{v}\,' \stackrel{def}{=} \mathrm{pr}_{\vec{a}}(\vec{v}) \cdot \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Napomena 2.5.1. Važi: $\mathrm{pr}_{\vec{a}}(\vec{v}) = \begin{cases} |\vec{v}\,'| & : \ \text{ako su } \vec{v}\,' \text{ i } \vec{a} \text{ istog smera,} \\ -|\vec{v}\,'| & : \ \text{inače.} \end{cases}$

Teorema 2.5.2. Za ne-nula vektore $\vec{a}, \vec{b}$ važi: $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \mathrm{pr}_{\vec{a}}(\vec{b}) = |\vec{b}| \cdot \mathrm{pr}_{\vec{b}}(\vec{a})$.

Dokaz. ...

2.6. Vektorski proizvod vektora u R^3



Neka je $\mathbb{V}$ unitarni prostor vektora u R^3. Posmatrajmo pravaougli koordinatni sistem $Oxyz$, gde je $\vec{i} = (1,0,0)$ sa $[Ox)$-poluose, $\vec{j} = (0,1,0)$ sa $[Oy)$-poluose i $\vec{k} = (0,0,1)$ sa $[Oz)$-poluose. Smatramo da uređena trojka vektora $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ određuje *desni trijedar* ako je smer poluose $[Oz)$ tako određen da rotacija poluose $[Ox)$ ka poluosi $[Oy)$, u smeru suprotnom od kretanja kazaljke sata, ima najkraći put gledano sa tačaka poluose $[Oz)$. Dalja razmatranja odnosiće se na prethodno određen koordinatni sistem, sa fiksiranim trijedrom desne orjentacije[4] $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Za tri vektora $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2), \vec{c} = (x_3, y_3, z_3) \in V$ smatramo da uređena trojka vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ određuje u koordinatnom sistemu $Oxyz$:

(i) *desni trijedar* ako: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} > 0\,,$

(ii) *levi trijedar* ako: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} < 0\,;$

u suprotnom ne određuju trijedar ako je ispunjeno: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$

Definicija 2.6.2. Za dva vektora $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2) \in V$ *vektorski proizvod vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ određen je kao vektor:

$$\vec{a} \times \vec{b} \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \underbrace{(1,0,0)}_{\vec{i}} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \underbrace{(0,1,0)}_{\vec{j}} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \underbrace{(0,0,1)}_{\vec{k}},$$

tj.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

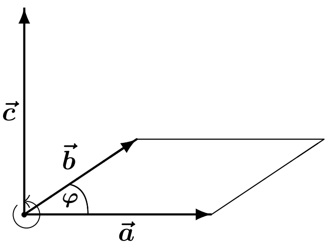
[4]druga mogućnost je da je fiksiran trijedar leve orjentacije

Teorema 2.6.1 Za dva ne-nula vektora $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2) \in V$, koji nisu paralelnih pravaca, vektorski proizvod $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ima sledeće osobine:

1^0. Pravac vektora $\vec{c}$ je normalan na ravan koju određuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

2^0. Smer vektora $\vec{c}$ je određen tako da uređena trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ bude desni trijedar.

3^0. Intezitet vektora $\vec{c}$ je određen veličinom površine paralelograma koji je formiran nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj. važi $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, za ugao $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.



Dokaz. **1^0.** ... **2^0.** ...

Napomena 2.6.1. Smer vektora $\vec{c}$ je takav da rotacija vektora $\vec{a}$ ka vektoru $\vec{b}$, u smeru suprotnom od kretanja kazaljke sata, ima najkraći put gledano sa završne tačke vektora $\vec{c}$.

Teorema 2.6.2. Za skalar $\lambda \in R$ i vektore $\vec{a}, \vec{b} \in V$ važi:

$$(i) \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} = \vec{0} \ \vee \ \vec{b} = \vec{0} \ \vee \ \vec{a} \parallel \vec{b},$$

$$(ii) \quad \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}),$$

$$(iii) \quad \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b},$$

$$(iv) \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}).$$

2.7. Mešoviti vektorski proizvod vektora u R^3

Definicija 2.7.1. Za tri vektora $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3) \in V$ *mešoviti vektorski proizvod vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$* određen je kao realan broj:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \stackrel{def}{=} \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Teorema 2.7.1. Mešoviti vektorski proizvod vektora $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3) \in V$ može se predstaviti kao determinanta:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Dokaz. ...

Posledica 2.7.1. Važi:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = -[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}].$$

Teorema 2.7.2. Ako vektori $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3) \in V$ nisu koplanarni u R^3, tada apsolutna vrednost njihovog mešovitog proizvoda jednaka je zapremini V paralelopipeda konstruisanog nad ta tri vektora dovedena na zajednički početak, tj. $\mathsf{V} = |\,[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\,|$.

Dokaz. ...

Napomena 2.7.1. Za vektore $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3) \in V$ važi:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{koplanarni u } R^3 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{linearno zavisni u } R^3,$$

odnosno:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{nekoplanarni u } R^3 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{linearno nezavisni u } R^3.$$

2.8. Tačka, prava i ravan u $\boldsymbol{R^3}$

***(i)* Tačka u $\boldsymbol{R^3}$.** Rastojanje između tačaka $M_1 = M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = M_2(x_2, y_2, z_2) \in R^3$ dato je formulom:

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Tačka $M = M(x, y, z) \in R^3$ sa koordinatama:

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n},\ y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n},\ z = \frac{mz_2 + nz_1}{m + n} \qquad (m, n > 0)$$

deli duž M_1M_2 u razmeri $|M_1M| : |MM_2| = m : n$.

***(ii)* Prava u $\boldsymbol{R^3}$.** Za tačku $M_0 = M_0(x_0, y_0, z_0) \in R^3$ i ne-nula vektor $\vec{\mathfrak{p}} = (a, b, c) \in \mathsf{V}$ postoji tačno jedna prava $\mathfrak{p}$ u R^3 koja sadrži tačku M_0 i ima vektor pravca $\vec{\mathfrak{p}}$. Neka je $\vec{\mathfrak{r}} = (x, y, z)$ vektor položaja proizvoljne tačke $M = M(x, y, z) \in \mathfrak{p}$ ($\vec{\mathfrak{r}} = \overrightarrow{OM}$), tada *vektorski oblik jednačine prave* $\mathfrak{p}$ je dat sa:

$$(*) \qquad \vec{\mathfrak{r}} = \vec{\mathfrak{r}}_{M_0} + t \cdot \vec{\mathfrak{p}} \qquad (t \in R).$$

Prethodna formula kojom se određuje skup tačaka M u R^3, u zavisnosti od $t \in R$, može se uzeti za definiciju prave $\mathfrak{p}$. Na osnovu vektorskog oblika jednačine prave izvode se razni oblici jednačine prave koje navodimo.

Parametarske jednačine prave:

$$x = x_0 + t \cdot a,\quad y = y_0 + t \cdot b,\quad z = z_0 + t \cdot c \qquad (t \in R).$$

Kanonske jednačine prave:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t \qquad (t \in R).$$

Ako je $a = 0 \vee b = 0 \vee c = 0$ u prethodnoj jednakosti članovi koji dovode do deljenja sa nulom se izostavljaju. Pri tom, dodatno, ako je $a = 0$ pišemo $x = x_0$, ako je $b = 0$ pišemo $y = y_0$, ako je $c = 0$ pišemo $z = z_0$.

Jednačina prave kroz dve tačke $M_1 = M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = M_2(x_2, y_2, z_2) \in R^3$ je data u obliku kanonske jednačine:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t \qquad (t \in R).$$

Prethodna formula kojom se određuje skup tačaka M u R^3, u zavisnosti samo od $t \in [0, 1]$, može se uzeti za definiciju duži M_1M_2.

Formula za rastojanje proizvoljne tačke $M = M(x_M, y_M, z_M) \in R^3$ *do prave* $\mathfrak{p}$, koja je određena[5] sa tačkom $M_0 = M(x_0, y_0, z_0) \in \mathfrak{p}$ i vektorom $\vec{\mathfrak{p}} = (a, b, c) \in \mathsf{V}$, je data sa:

$$d(M, \mathfrak{p}) = \frac{|(\vec{\mathfrak{r}}_M - \vec{\mathfrak{r}}_{M_0}) \times \vec{\mathfrak{p}}|}{|\vec{\mathfrak{p}}|}.$$

Formula za rastojanje između dve prave $(\mathfrak{p})$ $\vec{\mathfrak{r}} = \vec{\mathfrak{r}}_{M_1} + t \cdot \vec{\mathfrak{p}}$ $(t \in R)$ *i* $(\mathfrak{q})$ $\vec{\mathfrak{r}} = \vec{\mathfrak{r}}_{M_2} + s \cdot \vec{\mathfrak{q}}$ $(s \in R)$ je data sa:

$$d(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = \frac{|(\vec{\mathfrak{r}}_{M_2} - \vec{\mathfrak{r}}_{M_1}) \circ (\vec{\mathfrak{p}} \times \vec{\mathfrak{q}})|}{|\vec{\mathfrak{p}} \times \vec{\mathfrak{q}}|} \qquad (\vec{p} \times \vec{q} \neq \vec{0})).$$

[5] $\vec{\mathfrak{r}} = \vec{\mathfrak{r}}_{M_0} + t \cdot \vec{\mathfrak{p}} \quad (t \in R)$

***(iii)* Ravan u R^3.** Za tačku $M_0 = M_0(x_0, y_0, z_0) \in R^3$ i ne-nula vektor $\vec{n} = (A, B, C) \in \mathrm{V}$ postoji tačno jedna ravan π u R^3 koja sadrži tačku M_0 i ima vektor normale $\vec{n}$. Neka je $\vec{r} = (x, y, z)$ vektor položaja proizvoljne tačke $M = M(x, y, z) \in \pi$ ($\vec{r} = \overrightarrow{OM}$), tada *vektorski oblik jednačine ravni* π je dat sa:

$$(**) \qquad (\vec{r}-\vec{r}_{M_0})\circ\vec{n} = 0.$$

Prethodna formula kojom se određuje skup tačaka M u R^3 može se uzeti za definiciju ravni π. Odatle se izvode razni oblici jednačine ravni koje navodimo.

Jednačina ravni kroz datu tačku:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Opšti oblik jednačine ravni:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (\, D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 \,).$$

Segmetni oblik jednačine ravni:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad \Big(a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}\Big),$$

određujemo za $D \neq 0$. Za tačke $M_1 = M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3 = M_3(x_3, y_3, z_3) \in R^3$ *jednačina ravni π kroz tri tačke* određena je iz $[\,\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\,] = 0$, tj.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Big(M = M(x, y, z) \in \pi\Big).$$

Rastojanje tačke $T = T(x_T, y_T, z_T) \in R^3$ do ravni π date u opštem obliku $Ax + By + Cz + D = 0$ je dato sa:

$$d(T, \pi) = \frac{|Ax_T + By_T + Cz_T + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Na kraju napomenimo da se prava može zadati i kao presek dve ravni:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{array} \right\}$$

pri čemu $(A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2) \neq \vec{0}$.

3. SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

1^0. *Sistem linearnih jednačina*, nad poljem $\mathbf{F}$, za n-torku nepoznatih $(x_1, \ldots, x_n)$ nad poljem i konstante $a_{ij}, b_i \in F$ $\Big(i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ i $j \in \{1, 2, \ldots, n\}\Big)$, jeste konjukcija jednačina:

$$(\mathcal{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\}.$$

Ako je $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, tada sistem linearnih jednačina $(\mathcal{S})$ se naziva *homogeni sistem.* U suprotom ako postoji $b_i \neq 0$, sistem linearnih jednačina $(\mathcal{S})$ se naziva *nehomogeni sistem.* Skalare $b_1, b_2, \ldots, b_m \in F$ nazivamo slobodnim članovima sistema.

Sistem linearnih jednačina $(\mathcal{S})$ se može napisati u matričnom obliku:

$$(\mathcal{S}) \qquad Ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

pri čemu je $A = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$ – *matrica koeficijenata*, $x = [x_i]$ – *matrica kolona nepoznatih* nad $F^{n\times 1}$ i $b = [b_i] \in F^{m\times 1}$ – *matrica kolona slobodnih članova.* Sistem lineanih jednačina $(\mathcal{S})$ naziva se *saglasan sistem* (neprotivurečan, moguć) ako postoji matrica kolona $\alpha = [\alpha_i] \in F^{n\times 1}$ takva da za $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_n = \alpha_n$ konjukcija jednačina iz $(\mathcal{S})$ jeste tačna. Matrica kolona α se naziva *rešenje sistema linearnih jednačina* $(\mathcal{S})$. U suprotnom ako za sistem $(\mathcal{S})$ ne postoji rešenje, tada sistem linearnih jednačina $(\mathcal{S})$ se naziva *nesaglasan sistem* (protivurečan, nemoguć).

2^0. U cilju diskusije saglasnosti – nesaglasnosti sistema linearnih jednačina $(\mathcal{S})$ razmatra se pojam ranga.

Definicija 3.1. Neka je data matrica A formata $m \times n$ nad poljem $\mathbf{F}$, tj. $A \in F^{m\times n}$. *Rang matrice* A jeste broj r, u oznaci $\mathrm{rang}(A) = r$, takav da u matrici A postoji kvadratna regularna submatrica M reda r tako da su sve kvadratne submatrice većeg reda od r singularne. Matricu M nazivamo *glavnom submatricom.*

Napomena 3.1. Ako matrica $A = [\,0\,] \in F^{m\times n}$ jeste nula matrica $(A = \mathsf{0})$, tada $r = 0$. U suprotnom, ako matrica $A = [a_{ij}] \in F^{m\times n}$ nije nula matrica, tada $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$. Sveukupno za matricu $A \in F^{m\times n}$ važi: $0 \leq \mathrm{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Primer 3.1. $\ldots$

Teorema 3.1. Za matricu $A \in F^{m\times n}$ važi $\mathrm{rang}(A^{\mathrm{T}}) = \mathrm{rang}(A)$.

Dokaz. $\ldots$

Definicija 3.2. Za matricu $A \in F^{m\times n}$ *elementarne transformacije matrice* A su sledeće transformacije:

(i) Zamena mesta dve vrste (ili kolone).

(ii) Množenje jedne vrste (ili kolone) skalarom $\alpha \neq 0$.

(iii) Dodavanje elemenata jedne vrste (kolone), prethodno pomnoženih nekim skalarom α odgovarajućim elementima druge vrste (ili kolone).

Definicija 3.3. Matrice $A, B \in F^{m\times n}$ su *ekvivaletne matrice*, što označavamo $A \cong B$, ako se mogu dobiti jedna iz druge pomoću konačnog broja elementarnih transformacija.

Teorema 3.2. Neka je data matrica $A \in F^{m\times n}$ i neka je matrica $A' \in F^{m\times n}$ nastala zamenom i-te i j-te vrste (kolone). Tada važi:

$$\text{rang}(A') = \text{rang}(A).$$

Teorema 3.3. Neka je data matrica $A \in F^{m\times n}$ i neka je $\alpha \in F\backslash\{0\}$ proizvoljan ne-nula skalar. Tada:

$$\text{rang}(\alpha A) = \text{rang}(A).$$

Teorema 3.4. Neka je data matrica $A \in F^{m\times n}$ i neka su izdvojeni vektori vrste $v_i = [\, a_{i1} \dots a_{in} \,] \in F^{1\times n}$ $(i = 1, \dots, m)$. Ako je $\text{rang}(A) = r$, tada među vektor vrstama v_i postoji tačno r linearno nezavisnih vektora tako da preostlih $m - r$ vektora su linearne kombinacije ovih r vektora.

Posledica 3.1. Važi $\text{rang}(A) = \dim(V_v)$, gde $V_v = L(\{v_1, \dots, v_m\})$ određuje *vektorski prostor vrsta* $\mathbf{V}_{\boldsymbol{v}}$.

Teorema 3.4'. Neka je data matrica $A \in F^{m\times n}$ i neka su izdvojeni vektori kolone $w_j = [\, a_{1j} \dots a_{mj} \,]^{\mathrm{T}} \in F^{m\times 1}$ $(j = 1, \dots, n)$. Ako je $\text{rang}(A) = r$, tada među vektor kolonama w_j postoji tačno r linearno nezavisnih vektora tako da preostlih $n - r$ vektora su linearne kombinacije ovih r vektora.

Posledica 3.1'. Važi $\text{rang}(A) = \dim(V_k)$, gde $V_k = L(\{w_1, \dots, w_n\})$ određuje *vektorski prostor kolona* $\mathbf{V}_{\boldsymbol{k}}$.

Teorema 3.5. Neka je data matrica $A \in F^{m\times n}$ i neka je matrica $B \in F^{m\times n}$ dobijena od matrice A tako što su elementima jedne vrste (kolone) matrice A dodati elementi neke druge vrste (kolone) pomnoženi skalarom $\alpha \in F$. Tada važi:

$$\text{rang}(B) = \text{rang}(A).$$

Teorema 3.6. Elementarne transformacije ne menjaju rang matrice.

3^0. Neka je dat sistem linearnih jednačina $(\mathcal{S})$. *Elementarne transformacije sistema* $(\mathcal{S})$ su određene kao sledeće transformacije:

(i) Zamena mesta dve jednačine.

(ii) Množenje jedne jednačine skalarom $\alpha \neq 0$.

(iii) Dodavanje jedne jednačine, prethodno pomnožene nekim skalarom α odgovarajućoj drugoj jednačini.

Napomena 3.2. Za elementarnu transformaciju sistema linearnih jednačina $(\mathcal{S})$ možemo uzeti i zamenu dva sabiraka u jednoj jednačini samo ako se odgovarajuće zamene izvrše u svim jednačinama sistema tako da se iste nepoznate pišu jedne ispod drugih. Ovom transformacijom se vrši zamena redosleda u nizu nepoznatih!

Teorema 3.7. Elementarnim transformacijama skup rešenja sistema $(\mathcal{S})$ se ne menja.

Za sistem linearnih jednačina $(\mathcal{S})$ $Ax = b$ matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in F^{m\times n} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \in F^{m\times(n+1)}$$

nazivaju se *matrica sistema* i *proširena matrica sistema* respektivno. Tada važi sledeće tvrđenje:

Teorema 8. (Kronecker – Capelli) Sistem linearnih jednačina $(\mathcal{S})$ $Ax = b$ jeste saglasan akko važi:

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B).$$

Dokaz. ...

4^0. Za matricu koeficjenata $A = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$ i matricu kolonu nepoznatih $x = [x_i]$ nad $F^{n\times 1}$ neka je dat homogeni sistem:

$$(\mathcal{S}_0) \qquad Ax = \mathsf{0} \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Saglasno Kronecker – Capellijevoj teoremi linearan sistem $(\mathcal{S}_0)$ je uvek saglasn i ima rešenje. Jedno takvo rešenje je matrica kolona $\mathsf{0} = [0, \dots, 0]^{\mathrm{T}} \in F^{n\times 1}$ koju nazivamo *trivijalno rešenje*. Sa sledećom teoremom određujemo kada homogeni sistem ima i druga, takozvana *netrivijalna rešenja*.

Teorema 3.9. Homogeni sistem $(\mathcal{S}_0)$ od m–linearnih jednačina sa n–nepoznatih ima jedinstveno trivijalno rešenje akko je $\operatorname{rang}(A) = n$ (tada je $m \geq n$). Inače, homogeni sistem $(\mathcal{S}_0)$ ima i netrivijalna rešenja akko je $\operatorname{rang}(A) = r < n$, pri čemu je moguće $n - r$ nepoznatih izabrati proizvoljno.

Posledica 3.2. ***(i)*** Svaki homogeni sistem kod koga je $m < n$ ima i netrivijalna rešenja.

(ii) Svaki homogeni sistem kod koga je[6] $m = n$ ima netrivijalna rešenja akko je $|A| = 0$ (tada je $\operatorname{rang}(A) < n$).

(iii) Svaki homogeni sistem kod koga je $m > n$ ekvivalentan je, primenom Gaussovog algoritma, sa homogenim sistemom sa tačno $r \leq n$ jednačina ($r = \operatorname{rang}(A)$). Dakle, ovaj slučaj se svodi na jedan od prethodna dva slučaja.

Teorema 3.10. Skup svih rešenja homogenog sistema $(\mathcal{S}_0)$ ima strukturu vektorskog prostora.

Teorema 3.11. Svaki sistem linearnih jednačina:

$$(\mathcal{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\},$$

za $a_{ij}, b_i \in F$ $(i = 1, \dots, m \wedge j = 1, \dots, n)$, može se Gaussovim algoritmom, elementarnim transformacijama,

[6]tzv. *homogeni kvadratni sistem*

dovesti do ekvivaletnog trougaonog sistema:

$$(\mathcal{S}_T) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \ldots + p_{1r}y_r & = & q_1 - p_{1(r+1)}y_{r+1} - \ldots - p_{1n}y_n \\ p_{22}y_2 + \ldots + p_{2r}y_r & = & q_2 - p_{2(r+1)}y_{r+1} - \ldots - p_{2n}y_n \\ & \vdots & \\ p_{rr}y_r & = & q_r - p_{r(r+1)}y_{r+1} - \ldots - p_{rn}y_n \\ 0 & = & \mu \end{array}\right\}$$

za $p_{ij}, q_i \in F$ $(i = 1, \ldots, r \ \wedge \ j = i, \ldots, n)$, $\mu \in F$ i $r = \mathrm{rang}(A) \leq n$. Pri tome je $p_{11} \cdot p_{22} \cdot \ldots \cdot p_{rr} \neq 0$ i $(y_1, \ldots, y_n)$ predstavlja jednu permutaciju od $(x_1, \ldots, x_n)$.

Napomena 3.3. Sistem $(\mathcal{S})$ je saglasan akko je $\mu = 0$. Ako je sistem $(\mathcal{S})$ homogen tada je $q_1 = \ldots = q_r = \mu = 0$.

4. KARAKTERISTIČNI KORENI I VEKTORI

1^0. Neka je data kvadratna matrica $A = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$. Glavni predmet proučavanja ovog dela su skalari $\lambda \in F$ i ne-nula matrice kolone $x = [\,x_1 \, \ldots \, x_n\,]^T \in F^{n\times 1}$ koji ispunjavaju uslov $Ax = \lambda x$, tj. za koje važi:

$$(\mathcal{K}) \qquad (A-\lambda I)x = 0 \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} (a_{11}-\lambda)x_1 & + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22}-\lambda)x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \ldots + & (a_{nn}-\lambda)x_n & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Definicija 4.1. Za kvadratnu matricu $A = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$ homogeni sistem $(\mathcal{K})$ se naziva *karakterističan* (*sopstveni*) *sistem matrice* A. Skalar $\lambda \in F$ se naziva *karakteristična* (*sopstvena*) *vrednost matrice* A ako za taj skalar karakterističan sistem ima netrivijalno rešenje $x = [\,x_1 \ldots x_n\,]^T \in F^{n\times 1}$ $-$ *karakteristični* (*sopstveni*) *vektor matrice* A *koji odgovara karakterističnoj vrednosti* λ.

Primetimo da potreban i dovoljan uslov da karakterističan sistem $(\mathcal{K})$ ima netrivijalno rešenje je dat sa:

$$|A - \lambda I| = 0.$$

Definicija 4.2. Za kvadratnu matricu $A = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$ polinom:

$$P_n(\lambda) = |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix}$$

se naziva *karakteristični* (*sopstveni*) *polinom matrice* A. Koreni karakterističnog polinoma se nazivaju *karakteristični* (*sopstveni*) *koreni matrice* A i skup svih tih korena određuju *spektar matrice* A.

Napomena 4.1. Za matricu $A = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$ pojmovi karakteristične vrednosti i karakterističnog korena se podudaraju. Zaista, na osnovu Posledice 3.2. (Teoreme 3.9.) skup skalara $\lambda \in F$ za koje razmatramo karakterističan sistem $(\mathcal{K})$ matrice A, tako da ima netrivijalna rešenja x u $F^{n\times 1}$, je konačan i određen je spektrom matrice A. Napomenimo da za svaki skalar $\lambda\in F$ izvan spektra matrice, homogeni sistem $(\mathcal{K})$ ima samo trivijalno rešenje $x = \mathsf{0}$ u $F^{n\times 1}$.

Definicija 4.3. Za kvadratnu matricu $A = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$ *karakteristični* (*sopstveni*) *potprostor matrice* A, koji odgovara karakterističnoj vrednosti λ, jeste skup svih vektora x u $F^{n\times 1}$ koji su rešenje karakterističnog sistema uključujući i nula vektor $x = \mathsf{0}$ u $F^{n\times 1}$.

Primer 4.1. Odrediti karakteristične vrednosti, vektore i potprostore sledećih matrica:

(i)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Proveriti rezultate koji su dobijeni pomoću `Maple`-a:

```
> restart;
> with(linalg):
> A:=matrix([[3,2,0],[2,4,-2],[0,-2,5]]);
```

$$\mathtt{A} := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

`> charpoly(A,λ);` # karakteristični polinom

$$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 39\lambda + 28$$

`> e:=eigenvalues(A);` # karakteristične vrednosti

$$\mathtt{e} := 1,\ 4,\ 7$$

`> v:=eigenvectors(A);` # karakteristični vektori

$$\mathtt{v} := [1, 1, \{[-2, 2, 1]\}], [4, 1, \{[2, 1, 2]\}], [7, 1, \{[1, 2, -2]\}]$$

`> v1:=v[1];` # za jednostruki koren $\lambda_1 = 1$ karkterističan potprostor je generisan sa $[-2, 2, 1]^{\mathrm{T}}$

$$\mathtt{v1} := [1, 1, \{[-2, 2, 1]\}]$$

`> v2:=v[2];` # za jednostruki koren $\lambda_2 = 4$ karkterističan potprostor je generisan sa $[2, 1, 2]^{\mathrm{T}}$

$$\mathtt{v2} := [4, 1, \{[2, 1, 2]\}]$$

`> v3:=v[3];` # za jednostruki koren $\lambda_3 = 7$ karkterističan potprostor je generisan sa $[1, 2, -2]^{\mathrm{T}}$

$$\mathtt{v3} := [7, 1, \{[1, 2, -2]\}]$$

Za karakteristične vrednosti λ_i odgovarajući karakteristični potprostori V_i i karakteristični vektori $\vec{v}_i$ su dati redom sa:

$$\lambda_1 = 1: \qquad V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t \;\middle|\; t \in R \right\} \qquad \text{i} \qquad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -2t \\ 2t \\ t \end{bmatrix} \quad (t \in R\backslash\{0\}),$$

$$\lambda_2 = 4: \qquad V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot t \;\middle|\; t \in R \right\} \qquad \text{i} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2t \\ t \\ 2t \end{bmatrix} \quad (t \in R\backslash\{0\}),$$

$$\lambda_3 = 7: \qquad V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot t \;\middle|\; t \in R \right\} \qquad \text{i} \qquad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ -2t \end{bmatrix} \quad (t \in R\backslash\{0\}).$$

(ii)

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Proveriti rezultate koji su dobijeni pomoću `Maple`-a:

```
> restart;
> with(linalg):
> B:=matrix([[3,1,1],[1,3,1],[0,0,2]]);
```

$$\mathtt{B} := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

`> charpoly(B,λ);` # karakteristični polinom

$$-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 20\lambda + 16$$

`> e:=eigenvalues(B);` # karakteristične vrednosti

$$\mathtt{e} := 2,\ 2,\ 4$$

`> v:=eigenvectors(B);` # karakteristični vektori

$$\mathtt{v} := [2, 2, \{[-1, 1, 0], [-1, 0, 1]\}], [4, 1, \{[1, 1, 0]\}]$$

```
> v1:=v[1]; # za dvostruki koren λ1,2 = 2 karkterističan potprostor je generisan sa [−1, 1, 0]T i [−1, 0, 1]T
```

$$\texttt{v1} := [2, 2, \{[-1, 1, 0], [-1, 0, 1]\}]$$

```
> v3:=v[3]; # za jednostruki koren λ3 = 4 karkterističan potprostor je generisan sa [1, 1, 0]T
```

$$\texttt{v3} := [4, 1, \{[1, 1, 0]\}]$$

Za karakteristične vrednosti λ_i odgovarajući karakteristični potprostori V_i i karakteristični vektori $\vec{v}_i$ su dati redom sa:

$$\lambda_{1,2} = 2: \qquad V_{1,2} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot p + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot q \;\middle|\; p, q \in R \right\} \qquad \text{i} \qquad \vec{v}_{1,2} = \begin{bmatrix} -p-q \\ p \\ q \end{bmatrix} \quad (p, q \in R \wedge \neg(p = q = 0)),$$

$$\lambda_3 = 4: \qquad V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot t \;\middle|\; t \in R \right\} \qquad \text{i} \qquad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \in R \backslash \{0\}).$$

Primetimo da je dimenzija $\dim(V_{1,2}) = 2$, u ovom primeru, jednaka redu $r = 2$ višestrukosti karakterističnog korena $\lambda_{1,2}$.

(iii)

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 6 \\ 1 & -15 & -1 \\ 16 & -15 & 3 \end{bmatrix}$$

Proveriti rezultate koji su dobijeni pomoću `Maple`-a:

```
> restart;
> with(linalg):
> C:=matrix([[2,-10,6],[8,-15,-1],[16,-15,3]]);
```

$$\texttt{C} := \begin{bmatrix} 2 & -10 & 6 \\ 8 & -15 & -1 \\ 16 & -15 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> charpoly(C,λ); # karakteristični polinom
```

$$-\lambda^3 - 10\lambda^2 + 100\lambda + 1000$$

```
> e:=eigenvalues(C); # karakteristične vrednosti
```

$$\texttt{e} := -10,\ -10,\ 10$$

```
> v:=eigenvectors(C); # karakteristični vektori
```

$$\texttt{v} := [-10, 2, \{[1, 3/2, 1/2]\}], [10, 1, \{[4, 1, 7]\}]$$

```
> v1:=v[1]; # za dvostruki koren λ1,2 = −10 karkterističan potprostor je generisan sa [1, 3/2, 1/2]T
```

$$\texttt{v1} := [-10, 2, \{[1, 3/2, 1/2]\}]$$

```
> v3:=v[3]; # za jednostruki koren λ3 = 10 karkterističan potprostor je generisan sa [4, 1, 7]T
```

$$\texttt{v3} := [10, 1, \{[4, 1, 7]\}]$$

Za karakteristične vrednosti λ_i odgovarajući karakteristični potprostori V_i i karakteristični vektori $\vec{v}_i$ su dati redom sa:

$$\lambda_{1,2} = -10: \qquad V_{1,2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \cdot t \;\middle|\; t \in R \right\} \qquad \text{i} \qquad \vec{v}_{1,2} = \begin{bmatrix} t \\ 3/2 \cdot t \\ 1/2 \cdot t \end{bmatrix} \quad (t \in R \backslash \{0\}),$$

$$\lambda_3 = 10: \qquad V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot t \;\middle|\; t \in R \right\} \qquad \text{i} \qquad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4t \\ t \\ 7t \end{bmatrix} \quad (t \in R \backslash \{0\}).$$

Primetimo da je dimenzija $\dim(V_{1,2}) = 1$, u ovom primeru, manja od reda višestrukosti $r = 2$ karakterističnog korena $\lambda_{1,2}$!

$\mathbf{2^0}$**.** Neka je data kvadratna matrica $A = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$ i skalari $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ $(\alpha_n \neq 0)$. Tada izraz:

$$P_n(A) = \alpha_n A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I$$

se naziva *matrični polinom* stepena n.

Teorema 4.1. (Cayley–Hamilton) Neka je za kvadratnu matricu $A = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$ određen karakteristični polinom:

$$P_n(\lambda) = |A - \lambda I| = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \lambda^k,$$

za koeficijente $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n \in F$ $(\alpha_n \neq 0)$, tada važi:

$$P_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k = \mathsf{0}.$$

Napomena 4.1. Neka je za kvadratnu matricu $A = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$ određen karakteristični polinom:

$$P_n(\lambda) = |A - \lambda I| = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \lambda^k,$$

tada važi:

$$\alpha_n = (-1)^n, \quad \alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A) \quad \text{i} \quad \alpha_0 = |A|$$

gde je $\mathrm{Tr}(A) \overset{def}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ – *trag matrice* A.

Definicija 4.4. Kvadratne matrice $A, B \in F^{n\times n}$ su *slične matrice*, što označavamo $A \sim B$, ako postoji regularna matrica $C \in F^{n\times n}$ takva da važi $B = C^{-1}A\,C$.

Teorema 4.2. Sličnost matrica jeste relacija ekvivalencije skupa matrica $F^{n\times n}$.

Dokaz. ...

Teorema 4.3. Slične matrice imaju isti spektar.

Dokaz. ...

Definicija 4.5. Neka je data kvadratna matrica $A = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$, tada polinom $m(\lambda)$ takav da ispunjava uslove:

(*i*) $m(A) = 0$,

(*ii*) koeficijent uz najveći stepen polinoma $m(\lambda)$ jednak je 1,

(*iii*) $m(\lambda)$ je polinom najmanjeg stepena za koje važe prethodni uslovi (*i*) i (*ii*);

naziva se *minimalni polinom matrice* A.

Teorema 4.4. Svaka kvadratna matrica $A = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$ ima jedinstven minimalan polinom $m(\lambda)$ i on je delilac karakterističnog polinoma $P_n(\lambda) = |A - \lambda I|$.

Dokaz. ...

Teorema 4.5. Neka je data kvadratna matrica $A = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$. Svaka nula karakterističnog polinoma $P_n(\lambda)$ je i nula minimalnog polinoma $m(\lambda)$.

Napomena 4.2. Nule minimalnog i karakterističnog polinoma se podudaraju i mogu se razlikovati samo svojim redom!

Algoritam za određivanje minimalnog polinoma matrice $A = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$:

1^{O}. Prvo odredimo karakteristični polinom $P_n(\lambda) = |A - \lambda I|$.

2^{O}. Izvršimo faktorizaciju polinoma $P_n(\lambda)$ na nerastavljive faktore.

3^{O}. Formirajmo sve moguće delitelje karakteristčnog polinoma tako da sadrže sve korene karakterističnog polinoma i da su jediničnog vodećeg koeficijenta.

4^{O}. Među prethodno određenim deliteljima izdvajamo one polinome koji se anuliraju u matrici A.

5^{O}. Minimalni polinom je polinom najnižeg stepena među polinomima određenim u prethodnom koraku.

Primer 5.2. Odrediti minimalni polinom matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in R^{3\times 3}.$$

Primenom prethodnog algoritma nalazimo:

1^{O}. $P_3(\lambda) = |A - \lambda I| = -\lambda^3 + 3\lambda^2$.

2^{O}. $P_3(\lambda) = -\lambda\cdot\lambda\cdot(\lambda - 3)$.

3^{O}. Delitelji $g(\lambda) = \lambda(\lambda - 3) = \lambda^2 - 3\lambda$ i $f(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 3) = \lambda^3 - 3\lambda^2$ karakterističnog polinoma $P_3(\lambda)$ sadrže sve korene karakterističnog polinoma i jediničnog su vodećeg koeficijenta.

4^{O}. Za oba polinoma $g(\lambda)=\lambda^2 - 3\lambda$ i $f(\lambda)=\lambda^3 - 3\lambda^2$ važi $g(A)=A^2 - 3A=\mathsf{0}$ (proveriti) i $f(A)=A^3 - 3A^2=\mathsf{0}$.

5^{O}. Minimalni polinom je $m(\lambda) = g(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda$.

Napomena: U prethodnom materijalu date su samo definicije, iskazi teorema i algoritama *a izostavljeni su (...) primeri i dokazi teorema* koji su rađeni na časovima predavanja!

Literatura:

D. Cvetković, I. Lacković, M. Merkle, Z. Radosavljević, S. Simić, P. Vasić: "Matematika I – Algebra"