Napomena: U materijalu koji sledi date su samo definicije, iskazi teorema i algoritama a *izostavljeni su primeri i dokazi teorema* **koji su radjeni na časovima predavanja.**
(Literatura: M. Merkle: "Matematička analiza: teorija i hiljadu zadataka")

Linearne dif. j-ne višeg reda

Definicija 1 Dif. j-na oblika $y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = F(x)$ jeste linearna dif. j-na n-tog reda.

Podrazumevamo: $f_i(x)$ i $F(x)$ def. i neprekidne na posmatranom intervalu I.

Ako je $F(x) \equiv 0$ homogena jednačina
Ako je $F(x) \not\equiv 0$ nehomogena jednačina

Ako su $f_i(x)$ $i = 1, 2, ...n$ konstante jednačina je sa konstantnim koeficijentima (u protivnom sa funkcionalnim).

Linearna, homogena dif. j-na

$$\underbrace{y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y}_{\text{označimo sa } L^n(y)} = 0$$

$y = 0$ je jedno rešenje (trivijalno rešenje).

Takodje se vidi:

- ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ rešenja tada je i $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ takodje rešenje date dif. j-ne. Ovo se lako uopštava na proizvoljan broj rešenja.

Kako odrediti opšte rešenje j-ne $L^n(y) = 0$?

Definicija 2 Funkcije $y_1(x), y_2(x), ...y_n(x)$ definisane na intervalu I su *linearno zavisne na I* ako postoje konstante $k_1, k_2, ...k_n$ takve da $k_1^2 + k_2^2 + ...k_n^2 \neq 0$ i da je
$(\forall x \in I)\ k_1y_1(x) + k_2y_2(x) + ... + k_ny_n(x) = 0.$

U protivnom su *linearno nezavisne.*

Definicija 3 Neka su $y_1(x), y_2(x), ...y_n(x)$ rešenja jednačine $L^n(y) = 0$.

Determinanta $W(y_1, y_2, ...y_n; x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$ naziva se determinanta Vronskog (Vronskijan).

Teorema 1 Neka su $y_1(x), y_2(x), ...y_n(x)$ rešenja jednačine $L^n(y) = 0$.
Tada je ili 1) $(\forall x \in I) W(y_1, y_2, ...y_n; x) \neq 0$
i f-je $y_1(x), y_2(x), ...y_n(x)$ su linearno nezavisne
ili 2) $(\forall x \in I) W(y_1, y_2, ...y_n; x) = 0$
i f-je $y_1(x), y_2(x), ...y_n(x)$ su linearno zavisne.

Napomena: u slučaju $n = 2$, linearna nezavisnost se svodi na $\dfrac{y_1}{y_2} \neq Const.$.

Teorema 2
Ako su $y_1(x), y_2(x), ...y_n(x)$ rešenja jednačine $L^n(y) = 0$ i ako su funkcije $y_1(x), y_2(x), ...y_n(x)$ linearno nezavisne tada je opšte rešenje date j-ne $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x)$ (c_i - konstante).

Linearna, homogena d.j. drugog reda: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

Teorema 3(*Liuvilova formula)*

Ako je $y_1(x)$ jedno netrivijalno partikularno rešenje linearne dif. j-ne $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ tada je

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} dx$$

takodje partikularno rešenje date jednačine, linearno nezavisno od y_1.

(Dokaz ...)

Linearna nehomogena jednačina:

$$\underbrace{\boldsymbol{y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y}}_{\text{označimo sa } L^n(y)} = \boldsymbol{F(x)}$$

- U slučaju $\boldsymbol{n = 2}$, snižavanje reda pomoću jednog partikularnog rešenja dovodi do linearne nehomogene jednačine prvog reda.

- **Teorema 4** Neka je $\boldsymbol{y_h}$ opšte rešenje homogene j-ne $\boldsymbol{L^n(y) = 0}$ i $\boldsymbol{y_p}$ jedno partikularno rešenje nehomogene j-ne $\boldsymbol{L^n(y) = F(x)}$. Tada je opšte rešenje nehomogene jednačine $\boldsymbol{L^n(y) = F(x)}$ dato sa

$$\boxed{\boldsymbol{y = y_h + y_p}}$$

· (Dokaz: neposredno se proverava da je $\boldsymbol{L^n(y_h + y_p) = L^n(y_h) + L^n(y_p) = 0 + F(x) = F(x)}$.)

- **Metod varijacije konstanti**

Teorema 5

Neka je $\boldsymbol{y_h = c_1y_1(x) + \ldots + c_ny_n(x)}$ opšte rešenje homogene j-ne $\boldsymbol{L^n(y) = 0}$.

Tada je opšte rešenje nehomogene j-ne $\boldsymbol{L^n(y) = F(x)}$ dato sa $\boxed{\boldsymbol{y = d_1(x)y_1(x) + \ldots + d_n(x)y_n(x)}}$

gde su $\boldsymbol{d_1(x), d_2(x), \ldots d_n(x)}$ funkcije čiji se izvodi nalaze rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{d_1'(x)y_1(x) + d_2'(x)y_2(x) + \ldots + d_n'(x)y_n(x) = 0}\\
&\boldsymbol{d_1'(x)y_1'(x) + d_2'(x)y_2'(x) + \ldots + d_n'(x)y_n'(x) = 0}\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&\boldsymbol{d_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + d_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + d_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = F(x)}
\end{aligned}$$

a zatim se same funkcije $\boldsymbol{d_1(x), d_2(x), \ldots d_n(x)}$ nalaze integracijom.

Linearna dif. j-na sa *konstantnim* koeficijentima

• Homogena j-na.: $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n y = 0$ $(*)$ (p_i - konstante)

Traži se partikularno rešenje u obliku $y = e^{\lambda x}$.
Zamenom u jednačinu dobijamo: $e^{\lambda x}(\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n) = 0$

Definicija 4 Algebarska jednačina $\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$ zove se *karakteristična jednacina* dif. j-ne $(*)$.

Karakteristična jednačina ima n **korena i svakom korenu odgovara po 1 partikularno rešenje**, po sledećim pravilima (1) - 4)) :

1) Svakom *realnom jednostrukom korenu* λ odgovara jedno partikularno rešenje: $y_p = e^{\lambda x}$.

2) Svakom *realnom korenu* λ *reda* $k > 1$ odgovara k partikularnih rešenja:
$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ \ldots\ x^{k-1}e^{\lambda x}$.

3) Svakom paru *kompleksnih jednostrukih korena* $\alpha \pm i\beta$ odgovaraju partikularna rešenja
$e^{\alpha x}cos\beta x$ i $e^{\alpha x}sin\beta x$

4) Svakom paru kompleksnih korena $\alpha \pm i\beta$ reda $k > 1$ odgovara $2k$ partikularnih rešenja:
$e^{\alpha x}cos\beta x,\ xe^{\alpha x}cos\beta x,\ \ldots\ x^{k-1}e^{\alpha x}cos\beta x$
$e^{\alpha x}sin\beta x,\ xe^{\alpha x}sin\beta x,\ \ldots\ x^{k-1}e^{\alpha x}sin\beta x$

Primenom pravila 1) -4) na sve korene karakteristične jednačine, dobija se skup od ukupno n **linearno nezavisnih rešenja** $y_1, y_2, \ldots y_n$ **d.j. pa je opšte rešenje homogene d.j.**
$y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots c_ny_n(x)$.

• Nehomogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n y = F(x)$$

Rešavanje nehomogene j-ne sastoji se iz dva koraka:

1. korak : Reši se homogena jednačina (tj. odredi se y_h).

2. korak :
Odredjuje se opšte rešenje nehomogene j-ne metodom varijacije konstanti (kako je opisano u teoremi 5).

Napomena: ako je *funkcija F(x) specijalnog oblika* može se jednostavnijim postupkom poznatim kao **metod neodredjenih koeficijenata** odrediti partikularno rešenje (y_p) nehomogene j-ne, pa je tada (na osnovu teoreme 4) $y = y_h + y_p$.

Metod neodredjenih koeficijenata

Sastoji se u tome da se partikularno rešenje nehomogene j-ne pretpostavi u obliku koji je sličan obliku f-je $F(x)$, ali sa neodredjenim koeficijentima koji se odredjuju zamenom u dif. j-nu. Kada se ovako nadje partikularno rešenje y_p, onda je (prema teoremi 4) opšte rešenje $y_h + y_p$.

Ovaj metod se primenjuje *samo* u slučaju kada je funkcija $F(x)$ oblika 1. ili 2.:

1. $\boxed{F(x) = e^{\alpha x}P_m(x)}$ ($P_m(x)$ je polinom stepena m)

Razlikujemo sledeća dva slučaja:

1.1 Ako $\boldsymbol{\alpha}$ **nije koren karakteristične jednačine**, tada je $\boldsymbol{y_p = e^{\alpha x} Q_m(x)}$.

1.2 Ako je $\boldsymbol{\alpha}$ **koren reda** $\boldsymbol{k}$ $\boldsymbol{(k \geq 1)}$ **karakteristične jednačine**, tada je $\boldsymbol{y_p = x^k e^{\alpha x} Q_m(x)}$.

Koeficijenti polinoma $\boldsymbol{Q_m(x)}$ nalaze se zamenom u nehomogenu dif. j-nu, metodom neodredjenih koeficijenata.

2. $\boxed{\boldsymbol{F(x) = e^{\alpha x}(P_{m_1}(x) cos\beta x \ + \ P_{m_2}(x) sin\beta x)}}$

Razlikujemo sledeća dva slučaja:

2.1 Ako $\boldsymbol{\alpha \pm i\beta}$ **nije koren karakteristične jednačine**, tada je
$\boldsymbol{y_p = e^{\alpha x}(Q_m(x) cos\beta x \ + R_m(x) sin\beta x)}$
gde su $\boldsymbol{Q_m(x), R_m(x)}$ polinomi stepena $\boldsymbol{m = max(m_1, m_2)}$.

2.2 Ako je $\boldsymbol{\alpha \pm i\beta}$ **koren reda** $\boldsymbol{k}$ $\boldsymbol{(k \geq 1)}$ **karakteristične jednačine**, tada je
$\boldsymbol{y_p = x^k e^{\alpha x}(Q_m(x) cos\beta x \ + R_m(x) sin\beta x)}$
gde su $\boldsymbol{Q_m(x), R_m(x)}$ polinomi stepena $\boldsymbol{m = max(m_1, m_2)}$.

Koeficijenti polinoma $\boldsymbol{Q_m(x), R_m(x)}$ nalaze se zamenom u nehomogenu dif. j-nu, metodom neodredjenih koeficijenata.